

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA, GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA



TRABAJO DE FIN DE GRADO

**Introducción al estudio local de singularidades de
hipersuperficies complejas**

Tutora: María Pe Pereira

Inés García Redondo

Doble Grado en Matemáticas y Física

Curso académico 2019-20

Convocatoria ordinaria

Madrid, 17 de julio de 2020

Índice general

1. La estructura cónica	3
1.1. El teorema de la estructura cónica	3
1.2. Algunos resultados previos de transversalidad	4
1.3. Demostración del teorema de estructura cónica	6
1.4. El link de una singularidad y algún ejemplo	8
2. La Fibración de Milnor	11
2.1. Singularidades de hipersuperficies	11
2.2. Lema de Selección de la Curva y consecuencia sobre los valores críticos	12
2.3. Fibraciones triviales y localmente triviales	12
2.4. El teorema de la Fibración de Milnor	13
2.5. Fibración de Milnor en el tubo	19
2.6. Equivalencia entre las fibraciones de Milnor en la esfera y en el tubo	20
3. Topología de la fibra de Milnor y el link	25
3.1. Teoría de Morse	25
3.2. Prueba del teorema sobre el tipo de homotopía de las fibras	28
3.3. Prueba del teorema sobre la topología del link	32
4. Hipersuperficies con una singularidad aislada	35
4.1. Condiciones de transversalidad	35
4.2. Estructura de libro abierto	36
4.3. Homología para orden menor que $n - 1$	37
4.4. Puntos críticos no degenerados o singularidades de Morse	38
4.5. Existencia de morsificaciones	40
4.6. Tipo de homotopía de las fibras	41
A. Algunas nociones básicas de conjuntos analíticos complejos	45

Abstract

The study of singularities is a branch of mathematics where ideas from different areas, such as algebra, geometry or topology, come together. In particular, in this work, we intend to study the local topology around singular points of complex hypersurfaces, following the famous approach of Milnor's work [11]. We will work with complex hypersurfaces defined by the zero set of a given holomorphic function $f : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ as follows

$$V(f) := \{z \in \mathbb{C}^n : f(z) = 0\}.$$

We will assume that $f(\underline{0}) = 0$ and that f has a critical point at the origin $\underline{0}$, so that the analytic set $f^{-1}(0)$ has a singular point at $\underline{0}$.

To start, we will study in chapter 1 the local conical structure of $V(f)$. Afterwards, in chapter 2, we will prove the famous Milnor's Fibration Theorem. This theorem states that $\frac{f}{|f|}$ defines a locally trivial fibration in a sufficiently small sphere around the critical point without the set $V(f)$. We will also give a very useful alternative version of this theorem. This second formulation will allow us to study the level sets of the function f close to the critical level set given by $V(f) = f^{-1}(0)$, in sufficiently close neighbourhoods of the critical point. In chapter 3 we will describe the topology of the fibers of the Milnor's Fibration and the topology of the intersection of $V(f)$ and the sphere, called the link of the singularity. Finally, in chapter 4, we study the case of an isolated singularity. We find several stronger versions of the facts that we will have already proved. Moreover, we will be able to identify the homotopy type of the fibers in that case as the homotopy type of a bouquet of spheres.

Introducción

El estudio de las singularidades de conjuntos definidos por los ceros de funciones holomorfas es un área de las matemáticas en la que se unen numerosas herramientas e ideas de diferentes disciplinas: geometría, topología o álgebra entre otras. El caso de hipersuperficies definidas por los ceros de una sola función, fue estudiado por John Milnor en [11], trabajo en el que probó el famoso teorema de fibración de Milnor. Este constituye uno de los enunciados fundamentales de la teoría, y será el resultado en torno al que gire el presente trabajo.

El objetivo de este texto, a grandes rasgos, consiste en estudiar la topología en entornos suficientemente pequeños de un punto singular de una hipersuperficie compleja. En particular, consideraremos una función analítica $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ definida en un abierto $U \subset \mathbb{C}^n$ que contiene al origen, y supondremos que $f(0) = 0$ y que $\nabla f(0) = 0$. Entonces $0 \in f^{-1}(0)$ será un punto singular de la hipersuperficie

$$V(f) := \{z \in \mathbb{C}^n : f(z) = 0\},$$

y estudiaremos la topología en entornos suficientemente próximos a este punto. Veremos que, de hecho, existe una bola $\mathbb{B}_\epsilon := \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| \leq \epsilon\}$ tal que 0 es el único valor crítico de $f|_{\mathbb{B}_\epsilon}$. De este modo, los conjuntos $f^{-1}(s) \cap \mathbb{B}_\epsilon$ serán conjuntos lisos para $s \neq 0$ en un entorno suficientemente próximo al 0. Con todo esto, de manera más precisa, el objetivo será estudiar la topología de la fibra singular $f^{-1}(0) \cap \mathbb{B}_\epsilon$ y de las fibras lisas $f^{-1}(s) \cap \mathbb{B}_\epsilon$ que hemos mencionado antes. Puesto que estamos desarrollando un estudio local, se recurre con frecuencia a las nociones de germen de la hipersuperficie en el origen $(V(f), 0)$ y de germen de la función analítica $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. Estos conceptos se explican en el anexo.

Para abordar este estudio local, se estructura el trabajo como sigue. En el capítulo 1 comenzamos estudiando el teorema de la estructura cónica. Este nos informa de que la forma en que la hipersuperficie se embebe en el ambiente es siempre la misma para entornos suficientemente pequeños. Además, nos dice que esta hipersuperficie es homeomorfa al cono sobre su intersección con una esfera de radio suficientemente pequeño. De este modo, se encuentra que tiene el tipo de homotopía de un punto, ya que el cono es contractible. A partir de este teorema, se define el concepto de link del germen $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, para el cual estudiaremos algunos ejemplos interesantes, y el de bola y esfera de Milnor.

Posteriormente, en el capítulo 2 se introduce el teorema de la fibración de Milnor, que hemos comentado antes. Este nos permite encontrar una fibración localmente trivial de la esfera de Milnor menos $V(f)$ en la circunferencia. Comenzaremos revisando algunos conceptos importantes para la compresión del teorema. Después, demostraremos la versión original del mismo, presentada por John Milnor en [11], para luego ver una versión alternativa de la misma que se utiliza mucho en este contexto, y probar la equivalencia entre ambas fibraciones.

En el capítulo 3 estudiamos la topología de la fibra de Milnor y del link de la función cuyos ceros definen la hipersuperficie. Para ello, es necesario introducir algunos conceptos fundamentales de

teoría de Morse para funciones reales. Con esta teoría, se prueba que las fibras tienen el tipo de homotopía de un CW-complejo de dimensión $n - 1$ y que el link resulta $(n - 3)$ -conexo.

Finalmente, en el capítulo 4 se aplican los resultados obtenidos al caso de singularidades aisladas. Esto supondrá añadir a las hipótesis que planteábamos antes que en un entorno U suficientemente próximo al origen $\underline{0}$ se tiene la equivalencia $\nabla f(x) = 0, x \in U \Leftrightarrow x = \underline{0}$. En este caso particular, se pueden reforzar algunos de los resultados obtenidos, y deducir consecuencias interesantes sobre cómo se comporta la fibración de Milnor. Veremos que esta induce una estructura de libro abierto en la esfera de Milnor, y que las fibras tienen el tipo de homotoía de un bouquet de μ esferas de dimensión $n - 1$. Para ello, se utilizarán herramientas relacionadas con las morsificaciones complejas, concepto que se introduce y detalla en el capítulo.

Comentario a la bibliografía utilizada

Para articular el estudio que se acaba de describir, se ha seguido principalmente la referencia que ya se ha mencionado [11], pues esta es una referencia clásica sobre el tema que recoge gran parte de los resultados y demostraciones que vertebran el trabajo. Además, para comprender los fundamentos del estudio local de la geometría analítica, que se exponen en el apéndice, se consultó [8] que recoge un estudio pormenorizado de estos asuntos. Para estudiar la teoría de Morse, que se utiliza de forma importante en el capítulo 3, se consultaron las referencias [10], [14] y [12]. Finalmente, para el estudio que se desarrolla en el capítulo 4 con respecto al tipo de homotopía de la fibra de Milnor se ha seguido el punto de vista expuesto en [1]. Esta es una referencia también clásica sobre el estudio de singularidades, que utiliza herramientas sobre monodromía que no se tratan en este trabajo. Sin embargo, las ideas expuestas en sus dos primeros capítulos se pueden aprovechar para las últimas secciones del capítulo 4 mencionadas.

Capítulo 1

La estructura cónica

En este capítulo, estudiaremos la topología local en torno a un punto de un conjunto analítico cualquiera embebido en \mathbb{C}^n . Probaremos que a partir de un cierto radio $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeño, el tipo topológico del par dado por la bola de radio $\epsilon \leq \epsilon_0$ centrada en dicho punto y su intersección con el conjunto analítico es siempre el mismo. De hecho, veremos que está determinado por cómo se incluye en la esfera dada por el borde de la bola la intersección del conjunto analítico con dicha esfera. Aquí se demostrarán estas cuestiones para el caso de singularidades aisladas. Sin embargo, este resultado se cumple también para lugares singulares no aislado, y más en general, para conjuntos analíticos reales. La demostración para singularidades no aisladas es más sutil que la que aquí presentaremos, y hace uso de estratificaciones de Whitney (ver [3] y [9]), por lo que aquí solo la comentaremos, aunque en capítulos siguientes asumiremos su validez.

1.1. El teorema de la estructura cónica

Sea V un conjunto analítico en \mathbb{C}^n , es decir, un conjunto definido como

$$V := \{\underline{x} \in U : f_1(\underline{x}) = 0, \dots, f_m(\underline{x}) = 0\}$$

para un cierto abierto $U \subset \mathbb{C}^n$ y con f_i para cada $i = 1, \dots, m$ una función holomorfa definida en U (ver sección A.2 del apéndice para más información sobre este tipo de espacios). Sea $p \in V$ un punto de dicho conjunto. Denotamos la esfera y la bola cerrada de radio $\epsilon > 0$ y centro p por $\mathbb{S}_\epsilon := \{z \in \mathbb{C}^n : \|z - p\| = \epsilon\}$ y $\mathbb{B}_\epsilon := \{z \in \mathbb{C}^n : \|z - p\| \leq \epsilon\}$.

Teorema 1.1.1. *Existe un $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño y una familia uniparamétrica de difeomorfismos $\{\varphi_t : t \in (0, \epsilon^2]\}$ que dependen de forma diferenciable del parámetro t de manera que:*

- *la función φ_{ϵ^2} es la identidad,*
- *cada función φ_t lleva el par $(\mathbb{S}_\epsilon, \mathbb{S}_\epsilon \cap V)$ en $(\mathbb{S}_t, \mathbb{S}_t \cap V)$, donde \mathbb{S}_t es la esfera de radio $r^2 = t$ centrada en p .*

Este resultado tiene un corolario importante. Antes de enunciarlo, merece la pena recordar la definición del *cono sobre un espacio topológico* X . Éste viene dado por el espacio cociente definido por

$$C(X) := \frac{X \times [0, 1]}{X \times \{0\}},$$

es decir, el espacio que resulta de colapsar un extremo del espacio $X \times [0, 1]$ a un punto.

Por ejemplo, el cono sobre $\mathbb{S}_\epsilon \cap V$ se define como la unión de los segmentos que unen los puntos de este espacio con p :

$$C(\mathbb{S}_\epsilon \cap V) := \{tx + (1-t)p : t \in [0, 1], x \in \mathbb{S}_\epsilon \cap V\}.$$

El cono sobre \mathbb{S}_ϵ se define de manera análoga y coincide con \mathbb{B}_ϵ . Con estas definiciones se tiene el siguiente resultado.

Corolario 1.1.1.1. *El par $(\mathbb{B}_\epsilon, \mathbb{B}_\epsilon \cap V)$ es homeomorfo al par dado por $(C(\mathbb{S}_\epsilon), C(\mathbb{S}_\epsilon \cap V))$.*

Veamos qué se consigue con este teorema. Una de las formas de estudiar la topología local de un punto en un conjunto analítico sería conocer el tipo topológico del par dado por el conjunto analítico en un entorno del punto y el ambiente. En particular, en el teorema consideramos los entornos dados por las bolas de radio $\epsilon > 0$. El tipo topológico del par $(\mathbb{B}_\epsilon, \mathbb{B}_\epsilon \cap V)$ se denomina *topología embebida* de V , y así, el teorema 1.1.1 nos indica que la topología embebida de V tiene el mismo tipo topológico que el par $(C(\mathbb{S}_\epsilon), C(\mathbb{S}_\epsilon \cap V))$. Además, nos dice que no depende del $\epsilon > 0$ que consideremos, a partir de uno suficientemente pequeño. El $C(\mathbb{S}_\epsilon \cap V)$ es un espacio contractible, por lo que podemos concluir que la hipersuperficie singular $V(f) \cap \mathbb{B}_\epsilon$ tiene topología trivial: su tipo de homotopía es el del punto. Sin embargo, en el capítulo siguiente, vamos a encontrar que hipersuperficies próximas a esta, de la forma $f^{-1}(s) \cap \mathbb{B}_\epsilon$ no tienen una topología tan sencilla.

1.2. Algunos resultados previos de transversalidad

Para poder demostrar estos resultados que acabamos de exponer en el caso de singularidades aisladas necesitamos conocer el siguiente resultado, que tiene importancia por sí mismo.

Proposición 1.2.1. *Sea (V, p) un germen de un conjunto analítico con $V \subset \mathbb{C}^n$, y supongamos que $p \in V$ es un punto liso o singular aislado de dicho conjunto analítico. Entonces, existe un $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeño de manera que cada esfera de radio ϵ con $0 < \epsilon < \epsilon_0$ centrada en p interseca $V^* = V - \text{Sing}(V)$ transversalmente.*

Demostración. Si llamamos \mathbb{S}_ϵ a la esfera de radio $\epsilon > 0$ centrada en p , que \mathbb{S}_ϵ y V^* sean transversales en un punto de su intersección $x_0 \in V^* \cap \mathbb{S}_\epsilon$ significa que los espacios tangentes a \mathbb{S}_ϵ y V^* en x_0 generan todo el espacio ambiente \mathbb{C}^n .

La esfera \mathbb{S}_ϵ es una superficie de nivel de la función distancia al cuadrado, que es una función real analítica $r : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$r(x) = \|x - p\|^2,$$

luego la esfera es una variedad real de dimensión $2n - 1$. Por su lado, el conjunto analítico V^* es una variedad compleja, con dimensión par menor o igual que $2n - 2$. Obsérvese que como p es liso o singular aislado, para un entorno U suficientemente próximo a p se tiene que $U \cap V^* = U \cap (V - \{p\})$. En particular, para valores de $\epsilon > 0$ suficientemente pequeños $V \cap \mathbb{S}_\epsilon \subset V^*$.

Así, ambos conjuntos no son transversales en $x_0 \in V^* \cap \mathbb{S}_\epsilon$ si son tangentes en dicho punto, es decir si y solo si $T_{x_0}V^* \subset T_{x_0}\mathbb{S}_\epsilon$. Los vectores $v \in T_{x_0}\mathbb{S}_\epsilon$ son aquellos que verifican $d_{x_0}r(v) = 0$, luego la condición anterior es equivalente a que se tenga

$$d_{x_0}r|_{T_{x_0}V^*} \equiv 0,$$

o lo que es lo mismo: que x_0 sea un punto crítico de $r_V = r|_{V^*}$. Con esto, si dicha intersección no contiene puntos críticos de r_V , se tiene que V^* y \mathbb{S}_ϵ son transversos en los puntos de esta.

Lo que probaremos aquí es que toda función analítica real definida sobre una variedad analítica lisa tiene un conjunto finito de valores críticos. De este modo, tomando $b > 0$ el valor crítico mínimo de r_V (obsérvese que $p \notin V^*$) tenemos que para $\epsilon < b$ la intersección $V^* \cap \mathbb{S}_\epsilon$ no contiene puntos críticos de r_V . Así, considerando $\epsilon_0 > 0$ de modo que ϵ_0^2 sea menor que b tendremos lo que buscábamos.

Para poder demostrar este hecho, supongamos que $V \subset \mathbb{C}^n$ viene definido por los ceros de las funciones holomorfas $\{f_1, \dots, f_m\}$. El conjunto de puntos críticos de una función analítica real $g : V^* \rightarrow \mathbb{R}$ es el conjunto de puntos de V^* en los que la aplicación diferencial inducida entre los espacios tangentes no es sobreyectiva. Éste se puede caracterizar como sigue (ver lema 2.7 de [11]).

Lema 1.2.1. *El conjunto de puntos críticos de la función analítica real $g : V^* \rightarrow \mathbb{R}$ viene dado por la intersección $V^* \cap W$, donde W es el conjunto analítico dado por los puntos $x \in V$ para los cuales la matriz formada por la jacobiana junto con una fila con las derivadas parciales de g :*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_{2n}} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{2n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_{2n}} \end{pmatrix},$$

tiene rango menor o igual que el máximo que alcanza la jacobiana de las funciones $\{f_1, \dots, f_m\}$ en V .

Con esto se puede probar que el conjunto de valores críticos de dicha función g , es decir el conjunto $g(V^* \cap W)$, es finito. Ello se debe a que $V^* \cap W = W - \text{Sing}(V)$, y esta resta de conjuntos analíticos puede expresarse como una unión finita de variedades analíticas. Para ver esto, en primer lugar consideramos la sucesión de conjuntos que parte de $M_1 = W - \text{Sing}(W)$, que es una variedad analítica lisa, y en la que vamos tomando:

$$M_2 = \text{Sing}(W) - \text{Sing}(\text{Sing}(W)), \quad M_3 = \text{Sing}(\text{Sing}(W)) - \text{Sing}(\text{Sing}(\text{Sing}(W))),$$

y así sucesivamente. Como $W \supset \text{Sing}(W) \supset \text{Sing}(\text{Sing}(W)) \dots$ es una sucesión anidada descendente, y puesto que el anillo de las funciones que definen estos conjuntos es noetheriano, esta cadena tiene que estabilizarse tras un número finito de pasos, es decir: $M_n = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$ a partir de un cierto índice. Así, se tiene que existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$W = M_1 \cup \dots \cup M_k.$$

Si ahora tomamos $M'_i = M_i \cap V^*$ se tiene lo que queríamos:

$$W - \text{Sing}(V) = M'_1 \cup \dots \cup M'_k.$$

Cada uno de los términos M'_i es un conjunto analítico de puntos lisos, luego se puede descomponer en una cantidad finita de componentes irreducibles que se corresponden con sus componentes conexas por caminos. Además, todos los puntos de cada M'_i son puntos críticos de g . Tomando dos puntos en una misma componente conexa por caminos de M'_i y considerando una curva que los une, todos los puntos de dicha curva serán puntos críticos de g , luego g será constante en

la curva. Con esto, vemos que g es constante en cada componente conexa por caminos de M'_i . Como hay una cantidad finita de estas, y asimismo, una cantidad finita de factores M'_i , se tiene que en efecto, g tiene un conjunto finito de valores críticos. Con esto se termina de probar el resultado que buscábamos. \square

1.3. Demostración del teorema de estructura cónica

La demostración del teorema 1.1.1 y de su corolario, en el caso de tener un punto liso o singular aislado, se harán de forma detallada, puesto que ponen en práctica una forma de proceder que se utiliza constantemente para probar los resultados básicos de la teoría que aquí estamos estudiando.

Demostración (del teorema 1.1.1 para singularidades aisladas). Sea $\epsilon_0 > 0$ lo suficientemente pequeño, de manera que $\mathbb{B}_{\epsilon_0} \cap V$ contenga a lo sumo un punto singular dado por p y tal que S_ϵ interseque transversalmente a V para todo $\epsilon \leq \epsilon_0$. Veímos en la demostración anterior que esto implica que cada punto $x \in V^* \cap \mathbb{B}_\epsilon$ no es un punto crítico de la restricción de $r(x) = \|x - p\|^2$ a V^* .

La idea de esta prueba se basa en construir un campo vectorial diferenciable $v(x)$ en la bola punteada $x \in \mathbb{B}_\epsilon - \{p\}$ que verifique unas ciertas condiciones, para obtener sus curvas integrales, las cuales nos darán la familia de difeomorfismos en cuestión. Estas condiciones son las siguientes.

1. En primer lugar, queremos que el campo no se anule en ningún punto de $\mathbb{B}_\epsilon - \{p\}$. Esto se hace para asegurar que las curvas integrales no se cortan entre sí.
2. Por otro lado, nos interesa que los vectores del campo apunten “hacia fuera” desde p , de manera que el producto escalar siguiente, de los vectores vistos en \mathbb{R}^{2n} , sea positivo:

$$\langle v(x), x - p \rangle = \sum_{i=1}^{2n} v_i(x)(x_i - p_i) > 0.$$

3. Por último, queremos que el campo $v(x)$ sea tangente a la variedad V^* .

Lo construimos de forma local. Sea $y \in \mathbb{B}_\epsilon - \{p\}$ fijo.

- Si y no pertenece a V , simplemente consideramos $v^y(x) = x - p$ para todo $x \in U_y$, donde U_y es un entorno de y que no corta a V . Se puede ver que este campo verifica las propiedades 1 y 2 de manera sencilla.
- Si $y \in V$, y por tanto pertenece a V^* , tomamos un sistema de coordenadas local $\{u_1, \dots, u_{2n}\}$ en un entorno U_y de y de modo que V^* verifique: $u_1 = \dots = u_{2\rho} = 0$. Como y no es un punto crítico de $r(x)$, se debe cumplir que alguna de las siguientes derivadas parciales sea no nula (las primeras son todas nulas por cómo hemos tomado las coordenadas):

$$\frac{\partial r(y)}{\partial u_{2\rho+1}}, \dots, \frac{\partial r(y)}{\partial u_{2n}}.$$

Supongamos que es $\partial r / \partial u_h(y) \neq 0$, entonces reducimos si es necesario el entorno U_y de y de modo que no se anule dicha derivada en él. En este entorno establecemos:

$$v^y(x) = \pm \left(\frac{\partial x_1(x)}{\partial u_h}, \dots, \frac{\partial x_{2n}(x)}{\partial u_h} \right),$$

tomando el signo + o - en función de si $\partial r / \partial u_h$ es positiva o negativa respectivamente.

Si tomamos un punto $x \in U_y \cap V^*$, en el sistema de coordenadas que estamos utilizando este viene dado por $(u_1(x), \dots, u_{2n}(x))$, y si consideramos la curva coordinada asociada a la coordenada u_h , es decir, dejamos fijos los valores $u_i(x)$ si $i \neq h$ y permitimos que $u_h(x)$ varíe, tenemos que esta curva permanece contenida en V^* , pues las primeras 2ρ coordenadas se mantienen nulas. De este modo, aseguramos que el vector definido anteriormente sea tangente a V^* en cada punto del entorno que pertenezca a esta variedad. Además se cumple:

$$2\langle v^y(x), x - p \rangle = \sum_i 2v_i^y(x_i - p_i) = \sum_i \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} \right) \left(\pm \frac{\partial x_i}{\partial u_h} \right) = \pm \frac{\partial r}{\partial u_h} > 0.$$

Con esto, nos aseguramos que se verifican las propiedades 1 y 2 que se han enumerado anteriormente. La 3 se garantiza por construcción, como veíamos en el comentario que se ha realizado en el párrafo anterior.

Tomando ahora una partición diferenciable de la unidad $\{\mu_y\}$ coherente con los entornos que hemos ido escogiendo, extendemos este campo local a toda la variedad:

$$v(x) = \sum \mu_y(x) v^y(x),$$

y este campo de $\mathbb{B}_\epsilon - \{p\}$ hereda las propiedades que queríamos de la construcción local.

Ahora, tomamos la normalización

$$w(x) = \frac{v(x)}{\langle 2(x - p), v(x) \rangle}.$$

Consideramos las curvas integrales $x = \gamma(t)$ de este último campo, que son las soluciones de la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = w(x).$$

Sabemos que estas soluciones deben existir localmente y son únicas, es decir, si $x_0 \in \mathbb{B}_\epsilon - \{p\}$ existe un intervalo $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ que contiene un valor t_0 de modo que $\gamma(t)$ está definida en dicho intervalo y $\gamma(t_0) = x_0$. Para evitar problemas si x_0 pertenece a la frontera de la bola \mathbb{B}_ϵ , supongamos que el campo se ha construido en una bola algo mayor $\mathbb{B}_{\epsilon'}$ con $\epsilon' > \epsilon$. Por otro lado, la normalización escogida hace que dichas curvas verifiquen:

$$\frac{d(r \circ \gamma)}{dt}(t) = \sum_i \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} \right) w_i(x) = \langle 2(x - p), w(x) \rangle = 1.$$

De modo que, redefiniendo el parámetro t si fuera necesario, tras restarle una constante, se tiene

$$r(\gamma(t)) = \|\gamma(t) - p\|^2 = t.$$

Veamos que esta solución $x = \gamma(t)$ puede extenderse al intervalo $0 < t \leq \epsilon^2$. Sabemos que la solución al problema diferencial anterior se puede extender a un intervalo maximal $\alpha' < t < \beta'$, que por lo que acabamos de comprobar, debe estar contenido en $(0, \epsilon'^2)$. Supongamos que $\beta' \leq \epsilon^2$. Como para todos los valores de t en $\alpha' < t < \beta'$, se tiene que $\gamma(t) \in \mathbb{B}_\epsilon$, que es un compacto, se alcanza un punto límite x' de $\gamma(t)$ cuando t tiende a β' , de modo que: $r(x') = \beta' \neq 0$ luego $x' \in \mathbb{B}_\epsilon - \{p\}$, y $w(x')$, por cómo lo hemos definido, también es un campo vectorial diferenciable en torno a este x' . Así, para cada x'' en un entorno de x' y cada t'' en un intervalo suficientemente

pequeño I que contenga a β' también se cumple que existe una única solución al problema de valor inicial $dx/dt = w(x)$, a la que llamamos $q(t)$, con condición inicial $q(t'') = x''$ y $t \in I$. Si tomamos $t'' \in (\alpha', \beta') \cap I$, la unicidad de la solución de estos problemas nos dice que $\gamma(t) = q(t)$ para $t \in (\alpha', \beta') \cap I$, luego concatenando ambas soluciones podemos extender la solución $\gamma(t)$ a un intervalo mayor que el que habíamos tomado como maximal dado por $(\alpha', \beta') \cup I$, lo cual lleva a contradicción. Por tanto $\beta' > \epsilon^2$. Análogamente se puede probar $\alpha' = 0$.

Finalmente, notemos que la solución $\gamma(t)$ con $0 < t \leq \epsilon^2$ viene determinada por el valor inicial:

$$\gamma(\epsilon^2) \in \mathbb{S}_\epsilon.$$

Así, si restringimos el flujo asociado al campo $w(x)$ a la esfera \mathbb{S}_ϵ , es decir, consideramos la aplicación diferenciable $\varphi : \mathbb{S}_\epsilon \times (0, \epsilon^2] \rightarrow \mathbb{B}_\epsilon - \{p\}$, tenemos para cada $t \in (0, \epsilon^2]$ el difeomorfismo $\varphi_t : \mathbb{S}_\epsilon \rightarrow \mathbb{S}_t$ entre las esferas que nos daba el enunciado, que además depende diferenciablemente del parámetro. Además, como hemos tomado el campo $w(x)$ tangente a V^* , las curvas integrales que pasen por un punto de V^* deben quedar totalmente contenidas en esta variedad. Con esto se tiene que la restricción de φ a $(V \cap \mathbb{S}_\epsilon) \times (0, \epsilon^2]$ lleva difeomórficamente este espacio en $V \cap (\mathbb{B}_\epsilon - \{p\})$.

Finalmente, para probar el corolario basta con ver que como para cada $a \in \mathbb{S}_\epsilon$ se tiene que $\varphi_t(a)$ tiende a p conforme t tiende a 0, la siguiente correspondencia

$$at + (1-t)p \longrightarrow \varphi_{t\epsilon^2}(a) \quad t \in (0, 1]$$

se puede extender a un homeoformismo entre el $C(\mathbb{S}_\epsilon)$ y \mathbb{B}_ϵ . Este homeomorfismo lleva, tomando restricciones, $C(\mathbb{S}_\epsilon \cap V)$ en $\mathbb{B}_\epsilon \cap V$. \square

Vista la prueba del teorema 1.1.1 para singularidades aisladas, se pueden realizar dos observaciones importantes en relación a la misma. En primer lugar, merece la pena señalar que no se han precisado argumentos relativos a la holomorfía de las funciones, sino simplemente a su diferenciabilidad, luego este resultado es aplicable perfectamente a conjuntos analíticos reales. De hecho, es incluso válido para conjuntos semialgebraicos, es decir, definidos por igualdades y desigualdades de funciones reales, pero ver esto segundo no es directo.

Por otro lado, como ya se ha comentado, el resultado también es cierto aunque no tengamos una singularidad aislada en p . La demostración del resultado falla en este caso a la hora de definir el campo $v(x)$ tangente a V en $\mathbb{B}_\epsilon - \{p\}$. No tiene sentido hablar de espacio tangente en un punto singular, y al haber puntos singulares arbitrariamente próximos a p , no podremos definir este campo como necesitamos para la prueba. Como ya se ha comentado, la forma de arreglar esta cuestión pasa por utilizar estratificaciones de Whitney. Además, es interesante notar que si la singularidad de V no es aislada, en $\text{Link}(V)$ no será liso y perdemos las propiedades de transversalidad que hemos estudiado. Esta característica se traslada al cono, en el que encontramos que se cumple:

$$\text{Sing}(C(\text{Link}(V))) = C(\text{Sing}(\text{Link}(V))).$$

Un ejemplo trivial de esta situación en que el lugar singular no es aislado puede observarse en la hipersuperficie dada por los ceros de $f(x, y, z) = x^2 - y^3$ en \mathbb{C}^3 . En este caso tenemos que $\text{Sing}(V) = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : x = 0, y = 0\}$, mientras que z es arbitrario.

1.4. El link de una singularidad y algún ejemplo

Con los resultados que acabamos de probar, se definen los siguientes conceptos.

Definición 1.4.1. El espacio $\mathbb{S}_\epsilon \cap V$ se denomina *link* de V en p , y se denota por $\text{Link}(V, p)$. Si estamos en la situación en que V es una hipersuperficie definida por los ceros de una función holomorfa f , se puede denotar al link por $\text{Link}(f, p)$. En caso de que se sobreentienda cuál es el punto p , se denota simplemente por $\text{Link}(V)$ o $\text{Link}(f)$.

Obsérvese que si \mathbb{S}_ϵ y V son variedades lisas y transversas en cada $q \in \text{Link}(V, p)$, se tiene que $\text{Link}(V, p)$ es una variedad lisa con dimensión $\dim(V) - 1$. Además es compacta por ser la intersección de dos cerrados y ser un conjunto acotado.

Definición 1.4.2. El $\epsilon_0 > 0$ en que se realiza el Teorema 1.1.1, y cualquier otro $\epsilon > 0$ más pequeño, se denomina *radio de Milnor* para V . Asimismo, la esfera \mathbb{S}_ϵ y la bola \mathbb{B}_ϵ asociadas a dicho radio y centradas en la singularidad se denominan *esfera* y *bola de Milnor*, respectivamente.

Veamos algunos ejemplos interesantes de links en situaciones concretas.

- El primero que nos puede venir a la mente es el caso de un punto liso. Sea (V, x_0) el germen de un conjunto analítico con $x_0 \in V$ un punto liso, con lo que $V \subset \mathbb{C}^n$ es una variedad en un entorno de este punto y supongamos $\dim V = m$. En esta situación, tenemos que el $\text{Link}(V)$ en x_0 se corresponde con una esfera usual de dimensión m contenida \mathbb{S}_ϵ . Para demostrarlo se aplica el Lema de Morse (lema 3.1.1), que se expondrá en el capítulo 3 en detalle. La función real diferenciable dada por la restricción $r_V : V \rightarrow \mathbb{R}$ de la función distancia al cuadrado $r(x) = \|x - x_0\|^2$ a V , tiene un punto crítico no degenerado en x_0 . Esto se deduce de que x_0 es punto crítico de r :

$$\nabla r(x) = 2(x - x_0) = \underline{0} \Leftrightarrow x = x_0,$$

luego x_0 también debe ser punto crítico de la restricción r_V . Además, la matriz hessiana de r en dicho punto es $\text{Hess}(x_0) = 2\mathbb{I}_{2n}$. La hessiana de r_V se obtiene tomando la restricción de dicha hessiana de r al tangente a V en x_0 . Con esto, obtenemos una matriz también proporcional a la identidad, luego no degenerada y definida positiva, pero esta de orden m , la dimensión de V . Como acabamos de ver que x_0 es un punto crítico no degenerado de r_V de índice 0, aplicando el lema de Morse 3.1.1 podemos concluir que existe un sistema local de coordenadas $\{u_1, \dots, u_m\}$ en un entorno de x_0 en V^* tal que

$$r_V(x) = u_1^2 + \dots + u_m^2.$$

Con esto se deduce que el $\text{Link}(V, x_0) = V(f) \cap r^{-1}(\epsilon^2)$ es difeomorfo a la esfera definida por $u_1^2 + \dots + u_m^2 = \epsilon^2$.

- Otro caso interesante es el curvas planas. Si tomamos una función holomorfa $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, se tiene que $V(f) := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : f(x, y) = 0\}$ es una curva compleja en \mathbb{C}^2 . En este caso, la esfera de Milnor tiene dimensión real 3, mientras que el $\text{Link}(f, p)$ en torno a un punto cualquiera $p \in V(f)$ tiene dimensión real $2 - 1 = 1$ y es una variedad compacta. De este modo, encontramos que si el link es conexo, lo que se da cuando f es irreducible pues $V(f)$ tendrá una única componente irreducible (ver última sección del apéndice), entonces es un *nudo*, es decir homeomorfo a una circunferencia \mathbb{S}^1 embebida en \mathbb{S}^3 , lo que puede dar lugar a que esta se anude sobre sí misma. Si el link tiene más de una componente conexa, será homeomorfo a un *enlace*, que no es más que un conjunto de circunferencias posiblemente anudadas entre sí embebidas en \mathbb{S}^3 . Si se estudian curvas complejas en \mathbb{C}^m con $m > 2$, los nudos podrían siempre desanudarse, con lo que su topología embebida sería la misma que la de una curva lisa en \mathbb{C}^m . Veamos algunos casos concretos de esta situación con $m = 2$.

- Si consideramos $f(x, y) = xy$, se puede observar que $\underline{0}$ es un punto singular de V . El $\text{Link}(f)$ en torno a $\underline{0}$ es el enlace de Hopf, dado por dos \mathbb{S}^1 anudados entre sí. Esto

se puede ver de la forma siguiente. El conjunto $V(f)$ viene dado por la unión de los dos planos coordinados de \mathbb{C}^2 :

$$V(f) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y = 0\}.$$

Si consideramos la intersección de cada uno de estos planos con la bola de Milnor, obtenemos que dicha intersección es un disco contenido en un plano coordenado. Ambos discos tienen intersección no vacía, pues 0 está en los dos, y de hecho este es el único punto que pertenece a dicha intersección. Usando esto se puede ver que las fronteras de estos discos, que nos dan el $\text{Link}(f)$, son dos \mathbb{S}^1 anudados en \mathbb{S}^3 .

- Por otro lado, si tomamos $f(x, y) = x^p - y^q$, donde p y q son dos enteros coprimos mayores o iguales que 2, observamos que $V(f)$ tiene una singularidad en 0 . El $\text{Link}(f)$ de esta curva en torno al origen es un nudo toroidal de tipo (p, q) en \mathbb{S}^3 , es decir, un \mathbb{S}^1 que se anuda p veces alrededor de uno de los \mathbb{S}^1 que definen el toro, y q veces alrededor del otro \mathbb{S}^1 . Para obtener este resultado se procede como sigue. El $\text{Link}(f)$ en torno al origen en este caso viene dado por:

$$\text{Link}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x^p - y^q = 0\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x|^2 + |y|^2 = \epsilon^2\}.$$

Supongamos $(x, y) \in \text{Link}(f)$. La primera condición, conlleva que $|x|^p = |y|^q$. Sustituyendo la expresión para $|y|$ que se obtiene en la definición de \mathbb{S}_ϵ , tenemos que $|x|^2 + |x|^{2p/q} = \epsilon^2$. Esto último implica que el módulo de x es igual a una constante: $|x| = \xi$. Por la relación entre los módulos de x e y , se puede decir lo mismo de esta segunda componente: $|y| = \eta$. Con todo, podemos expresar los complejos x e y de la siguiente manera:

$$x = \xi e^{i\theta}, \quad y = \eta e^{i\theta'},$$

con $\theta, \theta' \in [0, 2\pi)$. Esto nos permite en primer lugar, ver que $(x, y) \in \mathbb{S}_\xi^1 \times \mathbb{S}_\eta^1$, es decir, que en efecto dicho punto está contenido en un toro. Para ver que $\text{Link}(f)$ es el nudo que hemos descrito, sustituimos las expresiones para x e y en

$$x^p - y^q = \xi^p e^{ip\theta} - \eta^q e^{iq\theta'} = 0.$$

Por la relación entre los módulos, podemos cancelar los términos ξ^p y η^q , y quedarnos con una relación para las exponenciales. Haciendo un desarrollo de Taylor, a primer orden nos queda que los argumentos de x e y deben verificar:

$$\theta' = \frac{p}{q}\theta.$$

De este modo, dado un $x \in \mathbb{S}_\xi^1$ tal que $(x, y) \in \text{Link}(f)$, tenemos identificado el y que le corresponde en $\text{Link}(f)$. Además, por la relación entre los ángulos, si partimos de un mismo ángulo inicial para x e y y los vamos haciendo recorrer sus respectivas circunferencias, cuando θ da q vueltas a su circunferencia \mathbb{S}_ξ^1 , θ' habrá recorrido p vueltas a \mathbb{S}_η^1 , y puesto que p y q son coprimos, esta es la primera vez que volvemos al punto de partida. Así vemos que se obtiene el nudo que describíamos.

Capítulo 2

La Fibración de Milnor

A partir de ahora, nos centraremos en el caso de hipersuperficies, esto es, conjuntos $V(f) := \{x \in U : f(x) = 0\}$ con f una función holomorfa definida en un abierto U de \mathbb{C}^n . Por simplicidad en las expresiones, asumiremos que esta función lleva $f(\underline{0}) = 0$. En este capítulo veremos que si f tiene un punto crítico en el origen y si $\epsilon > 0$ es un radio de Milnor del germe del conjunto analítico $(V(f), \underline{0})$, entonces, la función argumento:

$$\frac{f}{|f|} : \mathbb{S}_\epsilon - \text{Link}(f, \underline{0}) \rightarrow \mathbb{S}^1$$

es localmente trivial, es decir, $\mathbb{S}_\epsilon - \text{Link}(f, \underline{0})$ está fibrado sobre \mathbb{S}^1 .

En primer lugar, definiremos las hipótesis de las situaciones con las que trabajaremos de aquí en adelante. A continuación daremos un teorema de gran importancia en este contexto y probaremos que los valores críticos de f en un entorno del punto crítico son aislados. Posteriormente estudiaremos y probararemos el resultado que acabamos de mencionar. Finalmente se probará una versión alternativa de este resultado que es muy común en este campo y resulta de gran utilidad.

2.1. Singularidades de hipersuperficies

Como hemos anunciado, en este y los siguientes capítulos trabajaremos con gérmenes de hipersuperficies. Una exposición más extensa sobre la teoría de conjuntos analíticos y gérmenes de estos conjuntos analíticos se puede consultar en las secciones A.2 y A.3 del apéndice. Para el estudio que aquí vamos a realizar, basta con la siguiente noción.

Definición 2.1.1. Una hipersuperficie compleja embebida en \mathbb{C}^n es un conjunto $V \subset \mathbb{C}^n$ de dicho espacio que localmente se puede definir como los ceros de una cierta función holomorfa.

Como aquí centraremos el estudio en un punto concreto $p \in V$ de dicha hipersuperficie, podemos dar una función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ con U un entorno abierto de p en \mathbb{C}^n de manera que

$$V = V(f) := \{x \in \mathbb{C}^n : f(x) = 0\}.$$

Por simplificar las expresiones consideraremos $p = \underline{0}$ y que la función f lleva $f(\underline{0}) = 0$. Con estas hipótesis definimos las dos situaciones fundamentales con las que trabajaremos en este texto.

Definición 2.1.2. Diremos que la hipersuperficie $V(f)$ es *singular* en $\underline{0}$ si la función holomorfa $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ con U un entorno abierto en \mathbb{C}^n del origen tiene un punto crítico en $\underline{0}$, es decir, si su gradiente cumple $\nabla f(\underline{0}) = \underline{0}$.

Definición 2.1.3. Diremos que la hipersuperficie $V(f)$ es singular con una *singularidad aislada* en $\underline{0}$ si f tiene un punto crítico aislado en $\underline{0}$.

2.2. Lema de Selección de la Curva y consecuencia sobre los valores críticos

Para poder probar el Teorema de Fibración de Milnor, necesitaremos hacer uso de un resultado importante en este contexto conocido como el *Lema de Selección de la Curva* o Lema de Selección de Curvas.

Lema 2.2.1 (De selección de la curva). *Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto definido por:*

$$U = \{x \in \mathbb{R}^m : g_1(x) > 0, \dots, g_r(x) > 0\},$$

donde g_i con $i = 1, \dots, r$ son funciones analíticas. Sea por otro lado V un conjunto analítico dado por los ceros de un conjunto finito de funciones analíticas. Si $0 \in \overline{U \cap V}$ entonces existe una curva real analítica $\gamma : [0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $\gamma(0) = \underline{0}$ y tal que $\gamma(t) \in U \cap V$ para $t > 0$.

La prueba de este resultado puede encontrarse en el capítulo 3 de [11]. Este lema tiene una consecuencia importante aplicado en el contexto que estamos estudiando.

Proposición 2.2.1. *Sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa definida en un abierto $U \subset \mathbb{C}^n$ con un punto crítico en $\underline{0} \in \mathbb{C}^n$ y tal que $f(\underline{0}) = 0$. Entonces existe un $\epsilon \geq 0$ suficientemente pequeño tal que 0 es el único valor crítico de $f|_{B_\epsilon}$. En otras palabras, los valores críticos de f son aislados.*

Demostración. Supongamos lo contrario. Entonces, existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos críticos de f que tiende al origen: $x_n \rightarrow \underline{0}$ cuando $n \rightarrow \infty$, cuyos valores críticos $f(x_n)$ son todos distintos de 0. En particular, esto significa que $\underline{0}$ es un punto de acumulación del conjunto de puntos críticos $x \in \Sigma_f$ tales que $f(x) \neq 0$. Puesto que Σ_f es un conjunto analítico, si quitamos $f^{-1}(0)$ de este conjunto, por ejemplo, tomando:

$$\Sigma_f - f^{-1}(0) = \Sigma_f \cap \{x \in \mathbb{C}^n : \|f(x)\|^2 > 0\},$$

tenemos que este es un conjunto en las condiciones de Lema de Selección de la Curva. Así, podemos tomar una curva $\gamma(t)$ con $t \in [0, \epsilon)$ de modo que $\gamma(0) = \underline{0}$ y tal que $\gamma(t) \in \Sigma_f - f^{-1}(0)$ para $t > 0$, luego en particular, $f \circ \gamma(t) \neq 0$ si $t > 0$. Sin embargo, al ser cada $\gamma(t)$ un punto crítico de f , se tiene que

$$\frac{d(f \circ \gamma)(t)}{dt} = 0, \quad \forall t \in (0, \epsilon).$$

Así, la función f es constante sobre la curva, y por continuidad, puesto que $f(\gamma(0)) = f(\underline{0}) = 0$, debe ser constantemente nula en la curva, en contradicción con que $\gamma(t) \in \Sigma_f - f^{-1}(0)$. Por tanto el enunciado debe ser cierto. \square

2.3. Fibraciones triviales y localmente triviales

Visto esto, pasemos a estudiar qué son las fibraciones triviales, pues este será un concepto fundamental en lo que sigue.

Definición 2.3.1. Sean X e Y variedades diferenciables, donde X podría tener borde, pero Y no. Sea $\phi : X \rightarrow Y$ una aplicación diferenciable sobreyectiva. Decimos que ϕ es una *fibración*

diferenciable trivial si existe otra variedad diferenciable F , con borde si X lo tiene, y un difeomorfismo $\varphi : X \rightarrow Y \times F$ de modo que $\phi = \pi_1 \circ \varphi$, con π_1 la proyección sobre el primer espacio. Es decir, tal que el siguiente esquema resulta comutativo.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \times F \\ \phi \downarrow & \nearrow \pi_1 & \\ Y & & \end{array}$$

Si consideramos para cada $y \in Y$ la fibra $\phi^{-1}(y)$ encontramos que $\phi^{-1}(y) = \varphi^{-1}(\{y\} \times F)$, y en particular tenemos que es difeomorfa a la variedad F .

Definición 2.3.2. En las hipótesis anteriores, decimos que ϕ es una *fibración diferenciable localmente trivial* si para cada $p \in Y$ existe un entorno abierto $p \in U_p \subset Y$ de manera que la restricción:

$$\phi|_{\phi^{-1}(U_p)} : \phi^{-1}(U_p) \rightarrow U_p$$

es una fibración diferenciable trivial.

Así, si ϕ es localmente trivial, el espacio X tiene en cada punto la estructura local de un espacio producto donde uno de los términos es precisamente un entorno abierto de Y y otro la fibra $\phi^{-1}(y)$. Si Y es conexo, en particular, las fibras $\phi^{-1}(y)$ para cada $y \in Y$ son difeomorfas entre sí.

En general, una fibración localmente trivial no tiene por qué ser trivial. El caso más claro de esta circunstancia es el de la banda de Möbius. En ella, se tiene una fibración localmente trivial sobre la circunferencia se que encuentra en su centro. Esto se debe a que localmente la banda se obtiene considerando fibras dadas por segmentos rectos pegados a esta circunferencia de manera ortogonal. Así se tiene la estructura local de producto que acabamos de describir. Sin embargo, de manera global esto no se verifica, pues la estructura que se obtiene así es el cilindro. Este espacio es distinto de la banda de Möbius por ser orientable.

Al margen de esto, sí existe un caso concreto para el cual ambos conceptos se hacen equivalentes: una fibración localmente trivial sobre un espacio contractible es una fibración trivial.

Finalmente, incluimos un resultado debido a Ehresmann [4] que nos será útil en el futuro y nos permite identificar cuándo una aplicación es localmente trivial.

Teorema 2.3.1. Sean M y N dos variedades diferenciables, que en principio supondremos sin borde. Supongamos que $f : M \rightarrow N$ es una aplicación diferenciable sobreductiva propia (es decir bajo la cual las preimágenes de compactos de N son compactos en M) y que es submersión (su diferencial en cada punto de M es sobreductiva). Entonces f es localmente trivial.

Si además M tiene borde, esto es $\partial M \neq \emptyset$, y $f|_{\partial M}$ es una submersión, entonces también podemos concluir que f es localmente trivial.

2.4. El teorema de la Fibración de Milnor

Antes de enunciar y demostrar el resultado que da nombre a la sección, conviene fijar una serie de notaciones. En primer lugar, a partir de ahora consideraremos el producto interno hermítico y sesquilineal de \mathbb{C}^n definido para cada par de vectores $u, v \in \mathbb{C}^n$ por:

$$\langle u, v \rangle := \sum_{i=1}^n u_i \bar{v}_i.$$

Por otro lado, dada una función $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, definimos el gradiente complejo tomando las conjugadas de las derivadas parciales complejas:

$$\nabla^{\mathbb{C}} f := \left(\left(\overline{\frac{\partial f}{\partial z_1}} \right), \dots, \left(\overline{\frac{\partial f}{\partial z_n}} \right) \right).$$

Esta definición se toma así para que la regla de la cadena aplicada a la función f a lo largo de un camino $\gamma(t)$ tome la forma a la que estamos acostumbrados con el producto anterior:

$$\frac{d(f \circ \gamma)(t)}{dt} = \frac{df(\gamma(t))}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{d\gamma_i}{dt} = \langle \gamma'(t), \nabla^{\mathbb{C}} f \rangle.$$

En particular, si el camino $\gamma(t)$ cumple que $\gamma(t_0) = z_0$ y $\gamma'(t_0) = v$, tenemos que la derivada direccional de f en z_0 en la dirección de $v \in \mathbb{C}^n$ es lo que esperamos:

$$\frac{d(f \circ \gamma)(t_0)}{dt} = \langle \gamma'(t_0), \nabla^{\mathbb{C}} f(z_0) \rangle = \langle v, \nabla^{\mathbb{C}} f(z_0) \rangle.$$

Por último, podemos recuperar una estructura de espacio vectorial euclídeo real sobre \mathbb{R}^{2n} . Basta con considerar las componentes real e imaginaria de cada coordenada: $u_j = a_j + ib_j$ y $v_j = a'_j + ib'_j$, y tomar el producto escalar para $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$ dado por:

$$\mathcal{R}\langle u, v \rangle = \sum_{j=1}^n (a_j a'_j + b_j b'_j),$$

que, como vemos, coindice con el producto euclídeo usual. Así, la propiedad de hermiticidad se traduce en simetría:

$$\mathcal{R}\langle u, v \rangle = \mathcal{R}\overline{\langle v, u \rangle} = \mathcal{R}\langle v, u \rangle,$$

mientras que la sesquilinealidad simplemente en bilinealidad.

Esto permite, por ejemplo, caracterizar el espacio tangente una esfera \mathbb{S} centrada en $\underline{0}$ en un punto $p \in \mathbb{S}$ de la forma siguiente:

$$T_p \mathbb{S} = \{v \in \mathbb{C}^n : \mathcal{R}\langle v, p \rangle = 0\}.$$

Esto se debe a que la esfera es una variedad real, pues es la superficie de nivel de la función distancia, que es una función real.

Con esto claro, sea $(V(f), \underline{0})$ el germen de una hipersuperficie definida por los ceros de una función holomorfa $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, con U un entorno abierto del $\underline{0}$ en \mathbb{C}^n , que verifica $f(\underline{0}) = 0$.

Teorema 2.4.1 (Teorema de fibración de Milnor). *En las hipótesis anteriores se tiene que existe un $\epsilon_0 > 0$ tal que para cada $0 < \epsilon < \epsilon_0$ la función argumento dada por*

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{S}_\epsilon - \text{Link}(f, \underline{0}) &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ z &\longrightarrow \phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|} \end{aligned}$$

donde \mathbb{S}^1 es la circunferencia, es una fibración diferenciable localmente trivial. La fibra de ϕ se denotará por $F_\theta := \phi^{-1}(e^{i\theta})$.

La demostración de este resultado tiene dos partes diferentes.

- En primer lugar, se debe probar que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño ϕ no tiene puntos críticos sobre $\mathbb{S}_\epsilon - \text{Link}(f, \underline{0})$, para que así las fibras $F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta})$ sean variedades diferenciables de \mathbb{S}_ϵ .
- Una vez hecho esto, se construye un campo vectorial apropiado que nos permita ver la estructura topológica local de producto.

Para ello, es muy útil observar que la función argumento se puede expresar como una determinación continua del argumento de f , es decir, mediante una función $\theta : \mathbb{S}_\epsilon - \text{Link}(f, \underline{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tal que:

$$\phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|} = e^{i\theta(z)}.$$

Dado $p \in \mathbb{S}_\epsilon - \text{Link}(f, \underline{0})$, se tiene que las diferenciales de ambas funciones se relacionan por:

$$d_p \phi(z) = i e^{i\theta(z)} d_p \theta(z).$$

Puesto que la exponencial es siempre no nula, esto conlleva que los puntos críticos de ambas funciones son los mismos, y además, por su expresión sabemos que las fibras de $\theta(z)$ y $\phi(z)$ coinciden.

De este modo, en la primera parte de la demostración que hemos comentado antes, podemos centrarnos en buscar los puntos críticos de $\theta(z)$. Veamos que su derivada direccional se puede caracterizar de modo sencillo. Si consideramos el valor principal del logaritmo complejo, al que denotamos por Log para distinguirlo del logaritmo real, se cumple que $\text{Log } f(z) = \log |f(z)| + i\theta(z)$. Teniendo en cuenta que $\theta(z)$ es una función real, esta se puede expresar de la siguiente manera

$$\theta(z) = \mathcal{R}(-i \text{Log } f(z) + i \log |f(z)|) = \mathcal{R}(-i \text{Log } f(z)).$$

Con esto, si tomamos un camino $\gamma(t)$ tal que $\gamma(t_0) = z_0$ y $\gamma'(t_0) = v$, podemos expresar la derivada de $\theta(z)$ en z_0 en la dirección de v como:

$$\frac{d(\theta \circ \gamma)}{dt}(t_0) = \mathcal{R} \left(\frac{d(-i \text{Log } f \circ \gamma)}{dt}(t_0) \right) = \mathcal{R} \langle \gamma'(t_0), \nabla^{\mathbb{C}}(-i \text{Log } f(z_0)) \rangle = \mathcal{R} \langle v, i \nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f(z_0) \rangle.$$

A partir de todo esto se deduce el siguiente lema.

Lema 2.4.1. *Los puntos críticos de la función $\phi(z)$ restringida a $\mathbb{S}_\epsilon - \text{Link}(f, \underline{0})$ son aquellos $z_0 \in \mathbb{S}_\epsilon - \text{Link}(f, \underline{0})$ tales que $i \nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f(z_0)$ es un múltiplo real de z_0 . Además, en caso de que z_0 no sea un punto crítico de dicha restricción, el espacio tangente a la fibra de ϕ en z_0 es el espacio ortogonal euclídeo a $i \nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f(z_0)$ en $T_{z_0} \mathbb{S}_\epsilon$.*

Demostración. En efecto, si $i \nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f(z_0) = \lambda z_0$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que la derivada anterior se anula para cada $v \in T_{z_0} \mathbb{S}_\epsilon$, por lo que z_0 es un punto crítico de $\theta(z)$ y por tanto de $\phi(z)$.

Además, aunque no sea un punto crítico de $\phi(z)$ restringida a $\mathbb{S}_\epsilon - \text{Link}(f, \underline{0})$, si consideramos una curva $\gamma(t)$ tal que $\gamma(t_0) = z_0$ y totalmente contenida en la fibra de $\phi(z)$ que contiene a z_0 , entonces se tiene que $\theta \circ \gamma$ es constante. De este modo, también se anula la derivada anterior. De ahí deducimos que el espacio tangente a la fibra de $\phi(z)$ en z_0 , dado por los vectores $v = \gamma'(t_0)$, es el complemento ortogonal euclídeo al vector $i \nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f(z_0)$. \square

Con esto, para demostrar la primera parte del resultado basta con ver que a partir de un cierto radio de Milnor se cumple que para cada $z_0 \in \mathbb{S}_\epsilon - \text{Link}(f, \underline{0})$ los vectores $i \nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f(z_0)$ y z_0 son linealmente independientes sobre los reales. De hecho, se puede probar un resultado más preciso sobre la relación entre ambos.

Lema 2.4.2. Existe un valor $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $z \in \mathbb{C}^n - V$ con $|z| \leq \epsilon_0$, los vectores z y $i \nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f(z)$ o bien son linealmente independientes sobre los números complejos, o bien:

$$\nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f(z) = \lambda z,$$

donde λ es un número complejo no nulo cuyo argumento, considerado en $(-\pi, \pi]$, tiene valor absoluto menor que $\pi/4$.

Este resultado, en particular, prueba lo que nos interesa, pues el complejo λ cumple que $\mathcal{R}(\lambda) > 0$, luego no puede ser imaginario puro, y así no se puede cumplir la condición para que z sea punto crítico de $\phi(z)$.

Para probar el lema 2.4.2 se hace uso del Lema de Selección de la Curva. Esta demostración se omite en este trabajo por brevedad y se puede consultar en el capítulo 4 de [11].

Sin embargo, sí entramos con detalle en la segunda parte de la demostración del teorema 2.4.1. En ella, se aplican técnicas semejantes a las que utilizábamos en el capítulo anterior. En este caso, buscamos construir un campo $v(z)$ en $z \in \mathbb{S}_\epsilon - \text{Link}(f, \underline{0})$ que verifique las siguientes propiedades:

1. ser no nulo en cada punto de $\mathbb{S}_\epsilon - \text{Link}(f, \underline{0})$,
2. ser tangente a \mathbb{S}_ϵ , esto es, verificar $\mathcal{R}\langle v(z), z \rangle = 0$ para cada $z \in \mathbb{S}_\epsilon - \text{Link}(f, \underline{0})$,
3. y finalmente, ser transversal a las fibras. Para conseguir esto se impone que cumpla para cada $z \in \mathbb{S}_\epsilon - \text{Link}(f, \underline{0})$:

$$\mathcal{R}\langle v(z), i \nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f(z) \rangle \neq 0.$$

Ello nos permite normalizar el campo $v(z)$ de la forma siguiente

$$w(z) = \frac{v(z)}{\mathcal{R}\langle v(z), i \nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f(z) \rangle}.$$

Este último campo $w(z)$ cumple que, si $z = \gamma(t)$ es una curva integral suya,

$$\frac{d(\theta \circ \gamma)}{dt}(t) = \mathcal{R} \langle w(z), i \nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f(z) \rangle = 1.$$

Así, el campo $w(z)$ será un levantamiento del campo unitario sobre la circunferencia $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$. Podremos asegurar la primera condición gracias a que a partir de cierto radio de Milnor tenemos que $\theta(z)$, y $\phi(z)$, tienen ambas diferencial sobreyectiva.

Construimos este campo localmente. Dado $z_0 \in \mathbb{S}_\epsilon - \text{Link}(f, \underline{0})$ tenemos las dos opciones siguientes.

- Por un lado, es posible que z_0 y $\nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f(z_0)$ sean linealmente independientes sobre el cuerpo de los complejos. Esta es una condición abierta, pues es equivalente a que la matriz dada por las componentes de z_0 y $\nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f(z_0)$ tenga algún menor de orden 2 no nulo. Así, podremos garantizar que se cumple en un entorno abierto U_{z_0} de z_0 . En cada punto $z^* \in U_{z_0}$ se define el sistema de ecuaciones lineales:

$$\langle v^*, z^* \rangle = 0,$$

$$\langle v^*, i \nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f(z^*) \rangle = 1,$$

para un $v^* \in \mathbb{C}^n$ cualquiera. Como el rango de la matriz de coeficientes del sistema es máximo (por la independencia lineal de z^* y $i \nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f(z^*)$ en cada punto z^* de U_{z_0}), este

sistema tiene solución $v^* \in \mathbb{C}^n$, que nos permite definir el campo $v_{z_0}(z^*) = v^*$ en U_{z_0} con las propiedades que enumerábamos antes.

En efecto, $v^* \neq 0$ por la segunda ecuación del sistema. Además, este vector v^* es tangente a \mathbb{S}_ϵ en z^* pues por la primera ecuación: $\mathcal{R}\langle v^*, z^* \rangle = 0$, y esta es la condición que veíamos que caracterizaba al espacio tangente a la esfera. Por otro lado, también verifica $\mathcal{R}\langle v^*, i\nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f(z^*) \rangle = 1 \neq 0$ por construcción.

- La otra posibilidad sería que $\nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f(z_0) = \lambda z_0$ con $\lambda \in \mathbb{C}$, donde, por el lema 2.4.2, el argumento de λ será menor estricto que $\pi/4$ en valor absoluto. De nuevo, la condición

$$\left| \arg \langle \nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f(z_0), z_0 \rangle \right| < \frac{\pi}{4}$$

es una condición abierta, luego podemos garantizar que se cumple para todo z^* en un entorno abierto U_{z_0} de z_0 . Si para cada $z^* \in U_{z_0}$ establecemos $v_{z_0}(z^*) = iz^*$, este campo local verifica que

$$\mathcal{R}\langle iz^*, z^* \rangle = 0,$$

y que

$$\left| \arg \langle iz^*, i\nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f(z^*) \rangle \right| = \left| \arg \langle z^*, \nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f(z^*) \rangle \right| < \frac{\pi}{4}.$$

Por la definición que hemos tomado, como $z^* \in \mathbb{S}_\epsilon$, el campo no se anula en ningún punto de U_{z_0} . La primera ecuación nos permite concluir que se trata de un campo tangente a la esfera. Finalmente, la propiedad sobre el argumento nos permite concluir que $\mathcal{R}\langle v(z^*), i\nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f(z^*) \rangle > 0$, y en particular es distinta de 0, en cada punto del entorno $z^* \in U_{z_0}$.

En cualquiera de los casos hemos podido construir un campo tangente diferenciable en un entorno U_{z_0} de z_0 , dado por $v_{z_0}(z)$, que verifica las propiedades que nos interesaban. Usando una partición diferenciable de la unidad $\{\mu_{z_0}\}$ subordinada a los entornos $\{U_{z_0}\}$, obtenemos un campo diferenciable global $v(z)$ definido para todo $z \in \mathbb{S}_\epsilon - \text{Link}(f, \underline{0})$ como:

$$v(z) = \sum \mu_{z_0}(z) v_{z_0}(z).$$

Por construcción, este campo $v(z)$ hereda las propiedades que nos interesaban del local. En efecto, debe verificar

$$\mathcal{R}\langle v(z), z \rangle = \sum \mu_{z_0}(z) \mathcal{R}\langle v_{z_0}(z), z \rangle = 0$$

y puesto que $\mu_{z_0} \geq 0$ para cada $z_0 \in \mathbb{S}_\epsilon - \text{Link}(f, \underline{0})$

$$\mathcal{R}\langle v(z), i\nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f(z) \rangle = \sum \mu_{z_0}(z) \mathcal{R}\langle v_{z_0}(z), i\nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f(z) \rangle > 0.$$

Así, tenemos que $v(z)$ es no nulo por la segunda ecuación, tangente a la esfera por la primera, y verifica que el producto $\mathcal{R}\langle v(z), i\nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f(z) \rangle \neq 0$.

Gracias a esta última propiedad, tomamos la normalización que anunciábamos:

$$w(z) = \frac{v(z)}{\mathcal{R}\langle v(z), i\nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f(z) \rangle}.$$

Este campo $w(z)$, como ya hemos comentado, cumple

$$\mathcal{R}\langle w(z), i\nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f(z) \rangle = 1,$$

y además, que $\langle w(z), i\nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f(z) \rangle$ tiene argumento menor en valor absoluto que $\pi/4$. Esto último también se hereda de la definición local, que verifica esta condición, pues al sumar números complejos con esta propiedad obtenemos un resultado que también pertenece a este cuadrante.

El flujo asociado al campo $w(z)$ será el que nos da el difeomorfismo que necesitamos para probar que ϕ es localmente trivial. Recordemos que queremos ver que existe un U_θ entorno abierto en la circunferencia de un determinado $e^{i\theta}$ tal que el siguiente diagrama es comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}_\epsilon - \text{Link}(f, \underline{0}) & \supset & \pi^{-1}(U_\theta) \xrightarrow{\varphi_\theta} U_\theta \times F_\theta \\ & & \downarrow \phi \\ \mathbb{S}^1 & \supset & U_\theta \xleftarrow{\pi_1} \end{array}$$

y donde además la aplicación φ_θ es un difeomorfismo.

Lo primero que vamos a comprobar es que el flujo que nos dan las órbitas del campo es completo, esto es, dichas curvas integrales están definidas en todo \mathbb{R} . Sabemos que estas deben existir localmente para un cierto intervalo maximal $I \subset \mathbb{R}$. Lo que queremos probar es que de hecho $I = \mathbb{R}$. Esto lo tendríamos asegurado en caso de estar trabajando en una variedad diferenciable compacta, pero $\mathbb{S}_\epsilon - \text{Link}(f, \underline{0})$ no lo es. Tenemos que ver que una curva integral $\gamma(t)$ cualquiera no tiende a $V \cap \mathbb{S}_\epsilon$ para un valor finito del parámetro de la curva $t_0 \in \mathbb{R}$, lo que “cortaría” su intervalo de definición. Si esto sucediera deberíamos tener:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(\gamma(t)) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} \mathcal{R}(\text{Log } f(\gamma(t))) = \lim_{t \rightarrow t_0} \log |f(\gamma(t))| = -\infty.$$

Sin embargo, encontramos que la derivada:

$$\frac{d\mathcal{R}(\text{Log } f \circ \gamma)}{dt} = \mathcal{R}\langle \gamma'(t), \nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f \rangle = \mathcal{R}\langle w(\gamma(t)), \nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f \rangle = -\mathcal{I}\langle w(\gamma(t)), i\nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f \rangle$$

que en particular tiene valor absoluto menor que 1, pues el argumento de dicho producto hermítico era menor que $\pi/4$. Así el crecimiento de la función está controlado y no puede dispararse a infinito para un valor finito t_0 . Esto concluye que el flujo es completo.

Por otro lado recordemos que sobre las curvas integrales $\gamma(t)$ del campo $w(z)$ se tiene

$$\frac{d(\theta \circ \gamma)}{dt}(t) = \mathcal{R} \langle w(z), i \nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f(z) \rangle = 1.$$

Así $\theta(\gamma(t)) = t + \theta_0$ con θ_0 el ángulo al que va a parar el valor inicial de la curva $\gamma(0) = z_0$ vía ϕ . Visto de otro modo: el camino $\gamma(t)$ es transversal a las fibras de manera que su imagen vía ϕ recorre la circunferencia con velocidad unitaria. Esto sumado a que t recorre todos los reales nos permite ver que ϕ es sobreyectiva.

En definitiva, hemos encontrado un flujo completo sobre $\mathbb{S}_\epsilon - \text{Link}(f, \underline{0})$ y sabemos cómo se comporta nuestra aplicación ϕ , que es sobreyectiva y diferenciable, sobre las órbitas del flujo. Para cada $t \in \mathbb{R}$ tenemos un difeomorfismo $\varphi_t : \mathbb{S}_\epsilon - \text{Link}(f, \underline{0}) \rightarrow \mathbb{S}_\epsilon - \text{Link}(f, \underline{0})$ que lleva la fibra $F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta})$ en la fibra $F_{\theta+t}$, y este difeomorfismo depende de forma diferenciable del parámetro t . De este modo, dado un entorno U_θ de $e^{i\theta}$ en \mathbb{S}^1 suficientemente pequeño, hemos conseguido encontrar el difeomorfismo:

$$\begin{aligned} U_\theta \times F_\theta &\rightarrow \phi^{-1}(U_\theta) \\ (e^{i(\theta+t)}, z) &\rightarrow \varphi_t(z) \end{aligned}$$

Con lo que en efecto podemos afirmar que ϕ es una fibración diferenciable localmente trivial. \square

2.5. Fibración de Milnor en el tubo

En la literatura encontramos comúnmente dos fibraciones localmente triviales a las que se denomina Fibración de Milnor. La que acabamos de desarrollar es la que introdujo el propio Milnor en [11]. En esta sección veremos la otra fibración que existe. Consideraremos una hipersuperficie singular en el origen.

Teorema 2.5.1 (Fibración de Milnor en el tubo). *Sea \mathbb{B}_ϵ una bola de Milnor (ver definición 1.4.2). Entonces existe un $\delta_0 > 0$ tal que para cada $\delta < \delta_0$, si \mathbb{D}_δ es el disco cerrado en \mathbb{C} de radio $\delta > 0$ y centro en $0 \in \mathbb{C}$ y $\partial\mathbb{D}_\delta \cong \mathbb{S}^1$ es su borde, entonces:*

$$\psi := f|_{f^{-1}(\partial\mathbb{D}_\delta) \cap \mathbb{B}_\epsilon} : f^{-1}(\partial\mathbb{D}_\delta) \cap \mathbb{B}_\epsilon \rightarrow \partial\mathbb{D}_\delta$$

es una fibración diferencial localmente trivial.

Para poder comprobar que esta función es localmente trivial, necesitamos ver primero el siguiente resultado. Denotemos $\mathbb{D}_\delta^* := \mathbb{D}_\delta - \{0\}$.

Lema 2.5.1. *Dado $\epsilon > 0$ un radio de Milnor, existe un $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que para cada $t \in \mathbb{C}$ con $0 < |t| \leq \delta$ la fibra $f^{-1}(t)$ interseca transversalmente a \mathbb{S}_ϵ .*

Para el caso en que se tiene una singularidad aislada en el origen, la demostración es sencilla. En este caso, sabemos que existe un $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $(V(f) \cap \mathbb{B}_\epsilon) - \{0\}$ es un conjunto liso. Por otro lado, también hemos comprobado en el lema 2.2.1 que el 0 era un valor crítico aislado de f , luego existe un $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que todas las fibras $f^{-1}(t) \cap \mathbb{B}_\epsilon$ con $t \in \mathbb{D}_\delta^*$ son lisas. Juntando ambas hipótesis, se tiene que $(f^{-1}(\mathbb{D}_\delta) \cap \mathbb{B}_\epsilon) - \{0\}$ es un conjunto liso. Esto nos permite repetir los argumentos que utilizamos en la proposición 1.2.1 para ver que las fibras $f^{-1}(t)$ con $t \in \mathbb{D}_\delta^*$ son transversales a \mathbb{S}_ϵ a partir de un cierto radio. En efecto, la función distancia al cuadrado, que es una función analítica real, tendrá sobre el conjunto liso $(f^{-1}(\mathbb{D}_\delta) \cap \mathbb{B}_\epsilon) - \{0\}$ un conjunto finito de valores críticos, luego redefiniendo el radio $\epsilon > 0$ para que sea menor al mínimo de entre estos, tenemos que el conjunto de las esferas con radio menor que ϵ intersecan transversalmente a las fibras $f^{-1}(t)$ con $t \in \mathbb{D}_\delta^*$.

No obstante, el resultado se verifica en general. Si la singularidad no es aislada, como ya hemos dicho anteriormente, no tenemos un $\text{Link}(f, 0)$ liso, por lo que fallan los argumentos anteriores. Para probar el resultado en estas circunstancias se hace uso de argumentos relacionados con estratificación de nuevo, y aquí lo omitiremos.

Demostración (del teorema 2.5.1). Veamos que la función de teorema 2.5.1 es localmente trivial utilizando el teorema de Ehresmann 2.3.1. Consideramos $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ verificando el lema anterior. Llamamos E a $f^{-1}(\partial\mathbb{D}_\delta) \cap \mathbb{B}_\epsilon$, de modo que $\partial E = f^{-1}(\partial\mathbb{D}_\delta) \cap \mathbb{S}_\epsilon$ y así, la función del enunciado es

$$\psi = f|_E : E \rightarrow \partial\mathbb{D}_\delta.$$

Veamos primero que ψ es una submersión en el interior de E y restringida a su frontera.

- Dado $z \in E - \partial E$, como hemos visto que las fibras $f^{-1}(t) \cap \mathbb{B}_\epsilon$ con $t \in \mathbb{D}_\delta^*$ son lisas, en particular las que provienen de $t \in \partial\mathbb{D}_\delta$ también lo son. De este modo, para cada $z \in E - \partial E = f^{-1}(\partial\mathbb{D}_\delta) \cap \mathring{\mathbb{B}}_\epsilon$, existe un entorno de $E - \partial E$ en el que $\psi = f$, y podemos garantizar que ψ es una submersión en z pues f lo es en dicho entorno.
- Ahora, si $z \in \partial E$, denotando $f(z) = t \in \mathbb{D}_\delta$ por el lema anterior se cumple que $f^{-1}(t)$ interseca transversalmente a \mathbb{S}_ϵ en z , y por tanto, si restringimos f a ∂E seguimos teniendo una submersión.

Además, ψ es propia. Sea $K \subset \partial\mathbb{D}_\delta$ un conjunto compacto, luego cerrado en $\partial\mathbb{D}_\delta$. Como ψ es continua, $\psi^{-1}(K)$ es cerrado en E , que es acotado, luego $\psi^{-1}(K)$ es un compacto en E . Por tanto ψ es propia.

Así, por el teorema de Ehresmann ψ es una fibración localmente trivial. \square

2.6. Equivalencia entre las fibraciones de Milnor en la esfera y en el tubo

Comencemos viendo qué significa que dos fibraciones son equivalentes.

Definición 2.6.1. Se dice que dos fibraciones localmente triviales $f : X \rightarrow Y$ y $f' : X' \rightarrow Y'$ son *equivalentes* si existen difeomorfismos $\Phi : X \rightarrow X'$ y $\Theta : Y \rightarrow Y'$ de manera que $\Theta \circ f = f' \circ \Phi$.

Obsérvese que para una hipersuperficie singular las fibras en el tubo son compactas, mientras que las de la función argumento son variedades abiertas. Como un espacio es cerrado y el otro es abierto, no puede haber un difeomorfismo entre el tubo y la esfera sin el link. La equivalencia entre ambas fibraciones se prueba para el caso en que restringimos la función en el teorema 2.5.1 a la bola abierta $\mathring{\mathbb{B}}_\epsilon$, restricción que renombramos de la forma siguiente

$$\mathring{\psi} := f|_{f^{-1}(\partial\mathbb{D}_\delta) \cap \mathring{\mathbb{B}}_\epsilon}.$$

Teorema 2.6.1. *Las fibraciones localmente triviales*

$$\mathring{\psi} : f^{-1}(\partial\mathbb{D}_\delta) \cap \mathring{\mathbb{B}}_\epsilon \rightarrow \partial\mathbb{D}_\delta \quad y \quad \phi : \mathbb{S}_\epsilon - \text{Link}(f, 0) \rightarrow \mathbb{S}^1,$$

donde esta segunda es la definida en el teorema 2.4.1, son equivalentes.

Para demostrar esta equivalencia se procede en dos etapas.

1. Primero se prueba que $\mathring{\psi}$ es equivalente a $\mathring{\phi}$, la fibración que se obtiene al restringir

$$\mathring{\phi} := \phi|_{\mathbb{S}_\epsilon - f^{-1}(\mathbb{D}_\delta)}.$$

2. Despues se comprueba que $\mathring{\phi}$ y ϕ también son equivalentes.

Para demostrar la primera parte, se plantean los dos lemas siguientes. En el primero de estos lemas construimos un campo apropiado, a partir del cual en el segundo probaremos que existe un difeomorfismo entre el tubo abierto $f^{-1}(\partial\mathbb{D}_\delta) \cap \mathring{\mathbb{B}}_\epsilon$ y el espacio $\mathbb{S}_\epsilon - f^{-1}(\mathbb{D}_\delta)$ que preserva las fibras.

Lema 2.6.1. *Existe un campo diferenciable de vectores $v(z)$ con $z \in \mathbb{B}_\epsilon - V(f)$ de modo que el producto escalar:*

$$\langle v(z), \nabla^{\mathbb{C}} \log f(z) \rangle$$

es real y positivo para todo $z \in \mathbb{B}_\epsilon - V(f)$, y que el producto:

$$\langle v(z), z \rangle$$

tiene parte real positiva constante.

Demostración. Se construye localmente de modo análogo al de la demostración del teorema 2.4.1. Una representación gráfica de lo que buscamos se presenta en la figura 2.1.

Sea $z_0 \in \mathbb{B}_\epsilon - V(f)$. Se tienen las dos opciones siguientes.

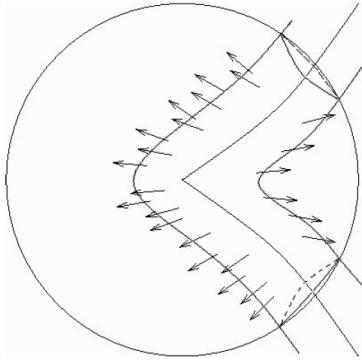


Figura 2.1: Diagrama del campo de vectores que se construye para “inflar” el tubo de Milnor y llevarlo sobre la esfera de Milnor. Imagen extraída de [15].

- Si z_0 y $\nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f(z_0)$ son linealmente independientes sobre el cuerpo de los complejos, entonces existe un entorno abierto U_{z_0} de z_0 en $\mathbb{B}_\epsilon - V(f)$ en el que se mantiene dicha independencia lineal para cada $z^* \in U_{z_0}$ y el correspondiente $\nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f(z^*)$. Así, dado $z^* \in U_{z_0}$, el sistema de ecuaciones lineales:

$$\langle v^*, \nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f(z^*) \rangle = 1,$$

$$\langle v^*, z^* \rangle = 1,$$

tiene una solución v^* que cumple las condiciones del enunciado por definición. De este modo definimos el campo local $v_{z_0}(z^*) = v^*$ para cada $z^* \in U_{z_0}$, cumpliendo lo que buscábamos.

- Si $\nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f(z_0) = \lambda z_0$ con $\lambda \in \mathbb{C}$ se cumple por el lema 2.4.2 que $\mathcal{R}(\lambda) > 0$. Así, si consideramos el vector complejo λz_0 se verifica que

$$\langle \lambda z_0, \nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f(z_0) \rangle = \|\lambda z_0\|^2 > 0$$

y que

$$\mathcal{R}\langle \lambda z_0, z_0 \rangle = \mathcal{R}(\lambda) \|z_0\|^2 > 0.$$

Las dos condiciones anteriores sobre los productos hermíticos son condiciones abiertas, luego podemos asegurar que se verifican para cada $z^* \in U_{z_0}$, con U_{z_0} un entorno abierto de z_0 en $\mathbb{B}_\epsilon - V(f)$. Así, estableciendo $v_{z_0}(z^*) = \lambda z^*$ para cada $z^* \in U_{z_0}$ se tiene el campo local que buscábamos.

Con esto, tomamos una partición diferenciable de la unidad subordinada a los entornos $\{U_{z_0}\}$ y extendemos el campo local a uno global $v(z)$ definido en $\mathbb{B}_\epsilon - V(f)$. Para asegurar que la parte real es constante además de positiva, simplemente establecemos la normalización

$$\frac{v(z)}{\mathcal{R}\langle v(z), z \rangle},$$

haciendo que sea siempre igual a 1. Obsérvese que esto está bien definido pues el denominador no se anula nunca. \square

Lema 2.6.2. *Existe un difeomorfismo entre $f^{-1}(\partial\mathbb{D}_\delta) \cap \mathring{\mathbb{B}}_\epsilon$ y $\mathbb{S}_\epsilon - f^{-1}(\mathbb{D}_\delta)$ que lleva difeomórficamente la fibra $\psi^{-1}(c) = f^{-1}(c) \cap \mathring{\mathbb{B}}_\epsilon$ en la fibra $\phi^{-1}(c/|c|)$, con $|c| = \delta$.*

Demostración. Tomando el campo cuya existencia acabamos de probar, consideramos para cada $z_0 \in f^{-1}(\partial\mathbb{D}_\delta) \cap \mathring{\mathbb{B}}_\epsilon$ su curva integral $\gamma(t)$ que cumple la condición inicial $\gamma(0) = z_0$.

Como tenemos que:

$$\frac{d \operatorname{Log} f(\gamma(t))}{dt} = \langle \gamma'(t), \nabla \operatorname{Log} f(\gamma(t)) \rangle$$

es real y positivo, y dado que

$$\operatorname{Log} f = \log |f| + i \arg f$$

podemos afirmar que el argumento de $f(\gamma(t))$ es constante y que su módulo es una función estrictamente creciente en t .

Además, la condición:

$$\frac{d \|\gamma(t)\|^2}{dt} = \frac{d}{dt} \mathcal{R} \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = 2 \mathcal{R} \langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle > 0$$

también nos garantiza que $|\gamma(t)|$ es una función creciente de t .

Con estas dos conclusiones tenemos que el camino anterior que empieza en un punto $z_0 \in f^{-1}(\partial\mathbb{D}_\delta) \cap \mathring{\mathbb{B}}_\epsilon$, lo aleja del origen en una dirección en la que aumenta $|f|$ hasta llevarlo a otro punto $z_1 \in \mathbb{S}_\epsilon$ para algún valor del parámetro, pongamos $t = t_1$. De hecho, se cumple que el punto z_1 está contenido en $\mathbb{S}_\epsilon - f^{-1}(\mathbb{D}_\delta)$, pues al ser $|f|$ estrictamente creciente sobre el camino $\gamma(t)$, se tiene $|f(z_1)| > |f(z_0)| = |c| = \delta$.

Además, si en particular $z_0 \in f^{-1}(c)$ para un cierto $c \in \partial\mathbb{D}_\delta$ se verifica:

$$\frac{f(z_0)}{|f(z_0)|} = \frac{c}{|c|} = \frac{f(z_1)}{|f(z_1)|},$$

pues como veíamos antes, en estos caminos el argumento de la función permanece constante. Así vemos que se tiene la correspondencia entre las fibras que se establece en el enunciado.

Finalmente, esta es toda la imagen, pues podemos hacer el proceso contrario al aquí expuesto: considerar un punto en $\mathbb{S}_\epsilon - f^{-1}(\mathbb{D}_\delta)$ y tomar el camino en sentido inverso (reparametrizando la solución) de modo que lo termina llevando a un punto en $f^{-1}(\partial\mathbb{D}_\delta) \cap \mathring{\mathbb{B}}_\epsilon$. Con esto además se prueba que esta correspondencia diferenciable entre ambos espacios es un difeomorfismo, pues tiene inversa asimismo diferenciable. \square

Vayamos ahora con la segunda parte de la prueba que comentábamos.

Lema 2.6.3. *Las fibraciones $\dot{\phi} = \dot{\phi} := \phi|_{\mathbb{S}_\epsilon - f^{-1}(\mathbb{D}_\delta)}$ y ϕ son equivalentes.*

Demostración. Siguiendo el proceso al que ya estamos habituados, se debe construir un campo diferenciable de $\mathbb{S}_\epsilon - \operatorname{Link}(V)$ cuyas curvas integrales nos den un difeomorfismo que preserve las fibras entre $\mathbb{S}_\epsilon - \operatorname{Link}(V)$ y $\mathbb{S}_\epsilon - f^{-1}(\mathbb{D}_\delta)$. Para ello, consideremos la función real positiva $|f|$ restringida a $\mathbb{S}_\epsilon - \operatorname{Link}(V)$.

En primer lugar se utiliza el lema de Selección de Curvas para mostrar que para cada $\theta \in \mathbb{R}$ existe un $\delta > 0$ suficientemente pequeño de manera que la restricción

$$|f||_{F_\theta \cap f^{-1}(\mathbb{D}_\delta^*) \cap \mathbb{S}_\epsilon}$$

no tiene puntos críticos. Si se supone lo contrario, existe una sucesión $\{z_n\}$ de puntos críticos de $|f|$ restringida a F_θ arbitrariamente próximos a $\operatorname{Link}(V(f), \underline{0})$, luego con $|f(z_n)| \rightarrow 0$ conforme $n \rightarrow \infty$. Por la compactitud de \mathbb{S}_ϵ este conjunto de puntos tendrá un punto de acumulación z_0

que por continuidad de la función $|f|$ debe estar en $z_0 \in \text{Link}(V(f), \underline{0})$. El lema de Selección de Curvas nos permite concluir que existe una curva $\gamma : (0, \epsilon') \rightarrow \mathbb{S}_\epsilon - \text{Link}(V(f), \underline{0})$ cuyos puntos son todos puntos críticos de $|f|$ restringida a F_θ , y con $\gamma(t) \rightarrow z_0$ cuando $t \rightarrow 0$. Pero entonces $|f(\gamma(t))|$ debe ser constante y, por continuidad debería ser constantemente nula, lo que es incompatible con que $\gamma(t)$ esté en $\mathbb{S}_\epsilon - \text{Link}(V(f), \underline{0})$ para $t > 0$. Por tanto lo que afirmábamos debe ser falso.

Si consideramos la aplicación que asocia a cada $\theta \in \mathbb{S}^1$ el $\delta > 0$ que cumple lo que acabamos de probar, se puede comprobar que esta es continua. Así, como \mathbb{S}^1 es un compacto, se puede escoger un δ que verifique que la restricción de $|f|$ en toda fibra F_θ no tiene puntos críticos en $f^{-1}(\mathbb{D}_\delta^*) \cap \mathbb{S}_\epsilon$.

Ahora, construyamos el campo sobre $\mathbb{S}_\epsilon - \text{Link}(V)$ siguiendo los pasos siguientes.

1. Sea un δ' tal que $0 < \delta' \ll \delta$. Cambiamos el δ que habíamos obtenido en la discusión anterior por $\delta - \delta'$, lo que nos permite asumir que la restricción de $|f|$ a las fibras F_θ no tiene puntos críticos en $f^{-1}(\mathbb{D}_{\delta+\delta'}^*) \cap \mathbb{S}_\epsilon$.
2. Sean $z \in f^{-1}(\mathbb{D}_{\delta+\delta'}^*) \cap \mathbb{S}_\epsilon$ y denotamos a la restricción $|f|_\theta = |f|_{F_\theta}$. Se define el campo

$$v(z) = \frac{\nabla|f|_\theta}{\|\nabla|f|_\theta\|^2}(z).$$

Este campo es tangente a las fibras F_θ por definición. Además es diferenciable puesto que $|f|_\theta$ no tiene puntos críticos en $f^{-1}(\mathbb{D}_{\delta+\delta'}^*) \cap \mathbb{S}_\epsilon$ y por tanto el denominador no se anula.

3. Con esta definición del campo $v(z)$, una curva integral del mismo $\gamma(t)$ que comience en $\gamma(0) \in F_\theta$ se mantiene en dicha fibra. Así, podemos comprobar que se verifica

$$\frac{d|(f \circ \gamma)(t)|}{dt} = \langle \gamma'(t), \nabla|f \circ \gamma| \rangle = \frac{1}{\|\nabla|f|_\theta\|^2} \langle \nabla|f|_\theta, \nabla|f|_\theta \rangle = 1.$$

Por tanto, se tiene: $|f(\gamma(t))| = t + |f(\gamma(0))|$

4. Finalmente consideramos una función diferenciable $g : (0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ que, como las particiones diferenciables de la unidad, nos permita extender este campo a toda la esfera. Esto se hace imponiendo que g sea tal que:

- $g(t) = 1$ si $t \leq \delta$,
- $g(t) \in [0, 1]$ para $t \in (\delta, \delta + \delta')$ y
- $g(t) = 0$ si $t \geq \delta + \delta'$.

Con esta definimos el campo que buscábamos en $\mathbb{S}_\epsilon - \text{Link}(V(f), \underline{0})$ es el dado por:

$$w(z) = \begin{cases} v(z)g(|f(z)|) & \text{si } z \in \mathbb{S}_\epsilon \cap f^{-1}(\mathbb{D}_{\delta+\delta'}^*) \\ 0 & \text{en c. c.} \end{cases}.$$

Puesto que g es diferenciable, $w(z)$ es diferenciable.

Gracias a este campo, encontramos el difeomorfismo de $\mathbb{S}_\epsilon - \text{Link}(V(f), \underline{0})$ en $\mathbb{S}_\epsilon - f^{-1}(\mathbb{D}_\delta)$ dado por la correspondencia Θ que definiremos a continuación. Sea $\gamma(t)$ la curva integral del campo $w(z)$ con condición inicial $z_0 \in \mathbb{S}_\epsilon - \text{Link}(V(f), \underline{0})$, que supongamos que está en una fibra $z_0 \in F_\theta$.

- Si $z_0 \in \mathbb{S}_\epsilon - f^{-1}(\mathbb{D}_{\delta+\delta'}^*)$, entonces la curva deja fijo este punto. Así, definimos $\Theta(z_0) = z_0$ y hemos terminado.

- Si $z_0 \in \mathbb{S}_\epsilon \cap f^{-1}(\mathbb{D}_{\delta+\delta'}^*)$, entonces, por cómo hemos ido tomando los campos, esta curva lleva z_0 a otros puntos $\gamma(t)$ en la misma fibra F_θ tales que $|f(\gamma(t))|$ es mayor que $|f(z_0)|$. En particular, si se establece $\Theta(z_0) = \gamma(\delta)$, entonces tendremos que $\Theta(z_0)$ está en $(\mathbb{S}_\epsilon \cap f^{-1}(\mathbb{D}_{\delta+\delta'}^*)) - f^{-1}(\mathbb{D}_\delta) \subset \mathbb{S}_\epsilon - f^{-1}(\mathbb{D}_\delta)$.

Esta función Θ constituye el difeomorfismo que conserva las fibras que buscábamos y concluye la prueba. Que es un difeomorfismo se ve reparametrizando los caminos para dar la inversa diferenciable. \square

Con todo lo que hemos desarrollado en las dos últimas secciones, se fijan las siguientes notaciones.

Definición 2.6.2. Se denomina *fibra de Milnor* a la fibra abierta de la aplicación del teorema 2.4.1

$$F_\theta := \phi^{-1}(e^{i\theta}),$$

que está bien definida pues las fibras F_θ y $F_{\theta'}$ son difeomorfas para valores $\theta \neq \theta'$.

Se denomina *fibra de Milnor compacta* o *fibra de Milnor en el tubo* a la fibra de la aplicación del teorema 2.5.1, dada por

$$F_s := f^{-1}(s) \cap \mathbb{B}_\epsilon$$

para $s \in \partial\mathbb{D}_\delta$ con $\delta > 0$ en las hipótesis del teorema. De nuevo, está bien definida pues esta fibra es difeomorfa a la que resulta de considerar cualquier otro $s' \in \partial\mathbb{D}_\delta$ distinto al anterior.

Por lo que acabamos de demostrar, se tiene que $\overline{F_\theta}$ es difeomorfa a F_s , y que F_θ lo es a $\overset{\circ}{F}_s = f^{-1}(s) \cap \overset{\circ}{\mathbb{B}}_\epsilon$.

Conocer estas dos fibraciones equivalentes asociadas al germen de una hipersuperficie proporciona gran riqueza al estudio de sus propiedades. La primera fibración, como veremos pronto, nos permitirá obtener información importante sobre la topología de las fibras. La segunda fibración resulta más útil de cara a generalizaciones que se realizaron de los conceptos desarrollados por Milnor, que aquí no estudiaremos. Aquí la utilizaremos especialmente en el estudio del caso de una singularidad aislada que desarrollaremos en el capítulo 4. Además, es interesante puesto que muestra la fibra singular como el límite de una familia de variedades complejas que degeneran en la hipersuperficie.

Obsérvese además, que atendiendo a la prueba de la estructura cónica que realizábamos, se tiene que las fibraciones que obtenemos son difeomorfas independientemente de la elección de $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ que realicemos (siempre que estos cumplan las propiedades necesarias que hemos revisado).

Capítulo 3

Topología de la fibra de Milnor y el link

En este capítulo pasaremos a estudiar la topología de la fibra de Milnor (definición 2.6.2) y del link (definición 1.4.1). Dada una hipersuperficie de \mathbb{C}^n singular en el origen el objetivo consiste en probar los siguientes resultados.

Teorema 3.0.1. *La fibra de Milnor tiene el tipo de homotopía de un CW-complejo finito de dimensión $n - 1$.*

Teorema 3.0.2. *Si $n \geq 3$ el $\text{Link}(f, \underline{0})$ es un espacio $(n - 3)$ -conexo.*

Esto significa que sus grupos de homotopía son todos triviales hasta orden $n - 3$. El caso $n = 3$ significa que el link es conexo, y el caso $n = 4$ que es conexo y simplemente conexo. Para el caso con $n = 2$ el link no tiene por qué ser conexo. De hecho, en el primer capítulo veíamos que para la hipersuperficie singular en el origen contenida en \mathbb{C}^2 definida por los ceros de $f(x, y) = xy$, el $\text{Link}(f, \underline{0})$ era el enlace de Hopf, que no es conexo.

Para probar los resultados que acabamos de enunciar, se hace uso de forma importante de la teoría de Morse para funciones reales. Por ello, comenzamos el capítulo revisando los contenidos más importantes de dicha teoría, para después pasar a demostrar estos enunciados.

3.1. Teoría de Morse

La teoría de Morse permite reconstruir la topología de una variedad diferenciable M a partir de una función diferenciable $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ con puntos críticos no degenerados, a la que llamaremos función de Morse. A estos puntos críticos se les asignará un número llamado índice de Morse, que influirá en la reconstrucción de la topología. Dada una variedad diferenciable M siempre existe una función de Morse como la anterior cuyos puntos críticos tienen valores distintos entre sí. Además, se puede obtener deformando una función diferenciable arbitraria $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. En particular, las funciones de Morse son densas en $C^2(M, \mathbb{R})$ con la topología adecuada [14]. Desarrollaremos los conceptos que acabamos de mencionar con un poco más de profundidad.

Los puntos críticos de una aplicación $f : M \rightarrow N$ diferenciable entre dos variedades diferenciables son aquellos en los que la matriz Jacobiana no alcanza el rango máximo que puede tener como aplicación lineal entre los tangentes. Por tanto, con la primera derivada podemos identificar dichos puntos críticos. Por su lado, la segunda derivada nos permitirá establecer una clasificación entre los mismos.

Definición 3.1.1. Un punto crítico $x_0 \in M$ de una función diferenciable $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ se

denomina *no degenerado* si y sólo si la Hessiana de la función en dicho punto es no degenerada. Es decir, cuando se verifica:

$$H_{f,x_0}(X, Y) = 0, \quad \forall Y \in T_{x_0}M \quad \Leftrightarrow \quad X = 0,$$

con $H_{f,x_0}(X, Y)$ la hessiana de f en x_0 evaluada en dos vectores del tangente $T_{x_0}M$.

Definición 3.1.2. Una función diferenciable $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una *función de Morse* si y sólo si todos sus puntos críticos son no degenerados.

Veamos cómo hacer más manejable este concepto. Sea un sistema de coordenadas local (x^1, \dots, x^m) en un entorno de $x_0 \in M$ de modo que $x^i(x_0) = 0, \forall i = 1, \dots, m$. Entonces, dos campos tangentes a la variedad X e Y cualesquiera tienen expresión local dada por:

$$X = \sum_i X^i \partial_{x_i}, \quad Y = \sum_j Y^j \partial_{x_j}.$$

En esta expresión, $\{\partial_{x_i}\}$ denota la base de los espacios tangentes dada por los campos coordinados. De esta manera tenemos también una expresión local para la Hessiana, pues:

$$H_{f,x_0}(X, Y) = \sum_{i,j} H_{ij} X^i Y^j, \quad H_{ij} := H_{f,x_0}(\partial_{x_i}, \partial_{x_j}).$$

Y así, un punto crítico x_0 es no degenerado si y sólo si $\det(H_{ij}) \neq 0$.

Además, la Hessiana expresada en este sistema de coordenadas local nos permite definir una función en un entorno de x_0 dada por:

$$H_{f,x_0}(x) = \sum_{i,j} H_{ij} x^i x^j,$$

la cual aparece en el desarrollo de Taylor de f en x_0 , de la manera siguiente

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} H_{f,x_0}(x) + O(3).$$

De hecho, existe un sistema de coordenadas en torno a cada punto crítico en el que la función de Morse adquiere la expresión del polinomio cuadrático dado por la Hessiana.

Teorema 3.1.1. *Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, $m = \dim M$ y $x_0 \in M$ un punto crítico no degenerado de f . Entonces, existe un entorno abierto U de x_0 en M y un sistema local de coordenadas (x^1, \dots, x^m) en U de modo que*

$$x^i(x_0) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad \& \quad f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} H_{f,x_0}(x), \quad \forall x \in U.$$

La prueba de este resultado, que es fundamental en esta teoría, puede consultarse en [14] (teorema 1.12). Con esto, definamos uno de los conceptos fundamentales de la Teoría de Morse: el índice de Morse de un punto crítico. Para ello, es preciso primero recordar el siguiente resultado de álgebra lineal.

Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita y $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica no degenerada. Entonces, existe al menos una base del espacio (e_1, \dots, e_n) de manera que para cada vector: $v = \sum_i v^i e_i$ se tiene

$$g(v, v) = -(|v^1|^2 + \dots + |v^\lambda|^2) + |v^{\lambda+1}|^2 + \dots + |v^n|^2.$$

El entero λ es independiente de la base y se denomina índice de g . Se define también como la dimensión del mayor subespacio vectorial $V_- \subset V$ que verifica que g restringida al mismo es definida negativa.

Definición 3.1.3. Sea x_0 un punto crítico no degenerado de la función diferenciable $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Se define su *índice de Morse*, denotado por $\lambda(x_0)$, como el índice de la Hessiana H_{f,x_0} .

Con esto, se deduce del teorema 3.1.1.

Lema 3.1.1 (de Morse). *Si x_0 es un punto crítico no degenerado de índice λ de una función diferenciable $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, entonces existe un sistema local de coordenadas (x^1, \dots, x^m) en un entorno de x_0 , de modo que $x^i(x_0) = 0, \forall i$ y que además verifica*

$$f = f(x_0) - \sum_{i=1}^{\lambda} (x^i)^2 + \sum_{j=\lambda+1}^m (x^j)^2.$$

Visto esto, dada una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable se define para cada $a \in \mathbb{R}$:

$$M^a = \{x \in M : f(x) \leq a\}.$$

La idea en que se basa la teoría de Morse es que al aumentar a de manera continua en un conjunto de valores regulares, la topología de M^a no varía. Este resultado se formaliza en el siguiente teorema.

Teorema 3.1.2. *Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Sean $a < b$ y supongamos que $f^{-1}([a, b]) = \{x \in M : a \leq f(x) \leq b\}$ es compacto y no contiene puntos críticos de f . Entonces M^a es difeomorfo a M^b . Además, M^a es un retracto de deformación de M^b , luego la inclusión $M^a \rightarrow M^b$ es una equivalencia homotópica.*

La idea de la demostración reside en aplastar M^b hasta convertirlo en M^a a través de trayectorias ortogonales a las hipersuperficies $f = cte$. El siguiente resultado clave de la teoría de Morse describe con precisión cómo son estos cambios para los puntos críticos no degenerados. De esta manera, a partir de una función de Morse sobre una variedad podemos recuperar la topología de la misma. Para entender este resultado es preciso conocer antes las siguientes nociones.

Definición 3.1.4. Denotamos por \mathbb{D}^n a la bola cerrada de dimensión n , definida por $\mathbb{D}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$. Se denomina *n-celda* a cualquier espacio homeomorfo a dicha bola.

Por ejemplo, el intervalo $[-1, 1]$ es una 1-celda, pues coincide con $\mathbb{D}^1 = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}$. Una bola cerrada de radio arbitrario también es trivialmente una celda de la dimensión que corresponda. *Adjuntar n-celdas* es una técnica que se emplea mucho en topología algebraica para obtener un nuevo espacio topológico a partir de otro conocido. Esto consiste en, dado un espacio topológico X y una función continua $\varphi : \partial\mathbb{D}^n \rightarrow X$, considerar, a partir de la unión disjunta de X y la n-celda, el espacio cociente dado por:

$$\frac{X \sqcup \mathbb{D}^n}{\sim_\varphi},$$

con \sim_φ la relación de equivalencia que induce la función φ entre la frontera de la bola y su imagen en X : $\varphi(x) \sim x$. Con esto, ya estamos en disposición de enunciar el siguiente resultado.

Teorema 3.1.3. *Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y sea $x \in M$ un punto crítico no degenerado con índice λ . Supongamos que $f(x) = c$ y que para cierto $\epsilon_0 > 0$, $f^{-1}([c - \epsilon_0, c + \epsilon_0])$ es compacto y no contiene más puntos críticos de x . Entonces, para cada $0 < \epsilon < \epsilon_0$ se tiene que $M^{c+\epsilon}$ tiene el tipo de homotopía de $M^{c-\epsilon}$ tras adjuntarle una λ -celda.*

Como anunciábamos, este resultado significa que conociendo una función de Morse cuyos puntos críticos tienen valores críticos distintos, y los índices de sus puntos críticos, podemos recuperar el tipo de homotopía de la variedad adjuntando λ -celdas según corresponda. Así, finalmente se puede demostrar el siguiente resultado, que es el que nosotros aplicaremos para poder calcular el tipo de homotopía de las fibras de Milnor.

Teorema 3.1.4. *Si f es una función de Morse en una variedad diferenciable M , y si cada M^a es compacta, entonces M tiene el tipo de homotopía de un CW-complejo, con una celda de dimensión λ por cada punto crítico de índice λ .*

La prueba de estos tres últimos resultados puede encontrarse en los teoremas 3.1, 3.2 y 3.5 de [12].

3.2. Prueba del teorema sobre el tipo de homotopía de las fibras

Con esto, nos encontramos en disposición de probar el teorema 3.0.1. Este nos dice que para una hipersuperficie de \mathbb{C}^n singular en el origen la fibra de Milnor F_θ tiene el tipo de homotopía de un CW-complejo finito de dimensión $n - 1$.

La demostración de dicho resultado se basa en aplicar el teorema 3.1.4 a una función de Morse basada en la restricción de $|f|$ a la fibra F_θ y así concluir el resultado. Para poder hacer todo esto, el primer paso consiste en identificar los puntos críticos de esa restricción. Para ello, resultará útil considerar la función diferenciable $a_\theta : F_\theta \rightarrow \mathbb{R}$, en la fibra F_θ , definida por:

$$a_\theta(z) = \log |f(z)|.$$

Nótese que los puntos críticos de esta función son los mismos que los de la función $|f|$ restringida a F_θ . Veamos cómo caracterizar los mismos.

Lema 3.2.1. *Los puntos críticos de la función a_θ en F_θ son aquellos $z_0 \in F_\theta$ tales que $\nabla^\mathbb{C} \text{Log } f(z_0)$ es un múltiplo complejo de z_0 .*

Demostración. Por la definición del valor principal del logaritmo, tenemos que

$$\log |f(z)| = \mathcal{R} \text{Log } f(z),$$

luego la derivada direccional de $\log |f|$ en la dirección v (vector tangente a F_θ en z_0) viene dada por

$$\mathcal{R}\langle v, \nabla^\mathbb{C} \text{Log } f(z_0) \rangle.$$

Por tanto, un punto $z_0 \in F_\theta$ es un punto crítico de $a_\theta(z)$ si cada derivada direccional de las anteriores es nula, es decir, si $\nabla^\mathbb{C} \text{Log } f(z_0)$ pertenece al complemento ortogonal euclídeo a F_θ en z_0 . Obtengamos una base de dicho espacio. Como F_θ es una subvariedad de \mathbb{R}^{2n} con codimensión 2, necesitamos dos vectores linealmente independientes.

Supongamos que tenemos una curva $z = \gamma(t)$ en F_θ que pasa por $\gamma(t_0) = z_0 \in F_\theta$ con vector tangente $\gamma'(t_0) = v$. Vimos en la demostración del teorema 2.4.1 que la derivada de la función θ sobre el camino anterior venía dada por:

$$\frac{d(\theta \circ \gamma)}{dt}(t_0) = \mathcal{R}\langle \gamma'(t_0), i\nabla^\mathbb{C} \text{Log } f(z_0) \rangle = \mathcal{R}\langle v, i\nabla^\mathbb{C} \text{Log } f(z_0) \rangle.$$

En este caso, esta derivada debe anularse pues al restringirnos a F_θ la función θ es constante. Así, $i\nabla^\mathbb{C} \text{Log } f(z_0)$ pertenece al complemento ortogonal que buscamos caracterizar.

Por otro lado, como $F_\theta \subset S_\epsilon$, un vector tangente a F_θ también es tangente a la esfera y cumple:

$$\mathcal{R}\langle v, z_0 \rangle = 0.$$

De hecho, por el lema 2.4.2 hemos visto que los vectores z_0 y $i\nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f(z_0)$ son linealmente independientes si $\epsilon > 0$ es suficientemente pequeño, y así, constituyen la base que buscábamos. Con todo esto, z_0 será un punto crítico de a_θ si y sólo si $\nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f(z_0)$ se puede expresar como combinación lineal real de los vectores z_0 e $i\nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f(z_0)$ y con esto se prueba el resultado. \square

El siguiente paso en la teoría de Morse consiste en computar la Hessiana en los puntos críticos de la función que estemos estudiando, para poder calcular el índice de Morse. Para ello, observemos que la Hessiana aplicada sobre un vector v del espacio tangente a F_θ en z_0 se puede expresar a partir de una curva $\gamma(t)$ con vector velocidad $\gamma'(t_0) = v$ en $\gamma(t_0) = z_0$ a través de la derivada segunda

$$\frac{d^2(a_\theta \circ \gamma)}{dt^2}(t_0).$$

Veamos cómo se puede caracterizar esta derivada segunda utilizando que z_0 es un punto crítico.

Lema 3.2.2. *Si $z_0 \in F_\theta$ es un punto crítico de a_θ , la segunda derivada anterior está dada por*

$$\frac{d^2(a_\theta \circ \gamma)}{dt^2}(t_0) = \sum \mathcal{R}(D_{jk}v_j v_k) - c|v|^2,$$

donde (D_{jk}) es una matriz de números complejos y c un número real positivo.

Demostración. Como nos estamos restringiendo a la fibra F_θ , se cumple que la función f sobre el camino que consideramos $\gamma(t)$, con $\gamma(t_0) = z_0$ y $\gamma'(t_0) = v$, tiene argumento constante, de modo que

$$a_\theta(\gamma(t)) = \log |f(\gamma(t))| = \text{Log } f(\gamma(t)) - i\theta.$$

Derivando respecto a t obtenemos

$$\frac{d(a_\theta \circ \gamma)}{dt}(t) = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial \text{Log } f}{\partial z_j}(\gamma(t)) \right) \left(\frac{d\gamma_j}{dt} \right),$$

y derivando de nuevo

$$\frac{d^2(a_\theta \circ \gamma)}{dt^2}(t) = \sum_{j,k=1}^m \left[\left(\frac{\partial^2 \text{Log } f}{\partial z_j \partial z_k}(\gamma(t)) \right) \left(\frac{d\gamma_j}{dt} \right) \left(\frac{d\gamma_k}{dt} \right) + \left(\frac{\partial \text{Log } f}{\partial z_j}(\gamma(t)) \right) \left(\frac{d^2\gamma_j}{dt^2} \right) \right].$$

Si ahora evaluamos en $t = t_0$ y tenemos en cuenta que por la caracterización de los puntos críticos de a_θ estudiada previamente se cumple

$$\nabla^{\mathbb{C}} \text{Log } f(z_0) = \lambda z_0$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$, renombrando

$$D_{jk} = \left(\frac{\partial^2 \text{Log } f}{\partial z_j \partial z_k}(z_0) \right)$$

podemos reescribir la ecuación para la derivada segunda de a_θ como sigue:

$$\frac{d^2(a_\theta \circ \gamma)}{dt^2}(t_0) = \sum_{j,k=1}^m D_{jk}v_j v_k + \langle \gamma''(t_0), \lambda z_0 \rangle.$$

No olvidemos que puesto que la función a_θ era real, también lo es su derivada. Multiplicando ambos lados por λ y tomando la parte real se tiene

$$\frac{d^2(a_\theta \circ \gamma)}{dt^2}(t_0)\mathcal{R}(\lambda) = \sum_{j,k=1}^m \mathcal{R}(\lambda D_{jk}v_j v_k) + |\lambda|^2 \mathcal{R}\langle \gamma''(t_0), z_0 \rangle.$$

Por otro lado, si derivamos dos veces la igualdad $\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = cte.$ (recordemos que el camino está contenido en la esfera de Milnor) y evaluamos en $t = t_0$ encontramos:

$$\begin{aligned} \langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle + \langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle &= 0, \\ \langle \gamma''(t), \gamma(t) \rangle + 2\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle + \langle \gamma(t), \gamma''(t) \rangle &= 0 \Rightarrow \mathcal{R}\langle \gamma''(t_0), \gamma(t_0) \rangle = -|v|^2. \end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo esta última igualdad en la expresión que teníamos llegamos a

$$\frac{d^2(a_\theta \circ \gamma)}{dt^2}(t_0)\mathcal{R}(\lambda) = \sum_{j,k=1}^m \mathcal{R}(\lambda D_{jk}v_j v_k) - |\lambda v|^2$$

y dividiendo entre $\mathcal{R}(\lambda)$, que debe ser positivo de nuevo por el lema 2.4.2, tenemos lo que buscábamos. \square

Con esta caracterización, ya estamos en disposición de calcular el índice de Morse. Como en este caso no podemos asegurar que los puntos críticos sean no degenerados, interpretamos el índice de Morse en uno de estos puntos críticos z_0 como la dimensión del mayor subespacio del tangente a F_θ en z_0 en el cual la forma cuadrática definida por la matriz de la Hessiana en z_0 es definida negativa. Se tiene el siguiente resultado.

Lema 3.2.3. *El índice de Morse de $a_\theta : F_\theta \rightarrow \mathbb{R}$ en un punto crítico es mayor o igual que $n - 1$.*

Demostración. En el lema anterior se ha demostrado que la Hessiana de a_θ en un punto crítico z_0 se podía expresar como la siguiente forma cuadrática en el espacio tangente a F_θ en z_0

$$H(v) = \sum \mathcal{R}(D_{jk}v_j v_k) - c|v|^2,$$

con

$$D_{jk} = \left(\frac{\partial^2 \text{Log } f}{\partial z_j \partial z_k}(z_0) \right).$$

Veamos cuál es la dimensión del mayor subespacio sobre el cual la forma anterior es definida negativa.

La clave en esta demostración es percatarse de lo siguiente: si $v \in T_{z_0}F_\theta$ es tal que $H(v) \geq 0$, entonces $H(iv) < 0$. En efecto, como c es un número real positivo, que se cumpla $H(v) \geq 0$ significa que el primer término de la suma anterior es positivo. De este modo, cambiar v por iv lo cambia de signo, mientras que el segundo término continúa siendo negativo, lo cual nos da $H(iv) < 0$. Además, como F_θ es una variedad compleja (tiene dimensión par $2n - 2$) su tangente es un espacio vectorial complejo, luego si $v \in T_{z_0}F_\theta$ entonces $iv \in T_{z_0}F_\theta$ y todo está bien definido.

Atendiendo a esta distinción, se divide el espacio tangente en dos partes: $T_{z_0}F_\theta = T_0 \oplus T_1$, de modo que la Hessiana sea definida negativa sobre T_0 y semidefinida positiva sobre T_1 . Así, el índice de Morse I que buscamos coincide con la dimensión de T_0 . Sin embargo, por lo que se acaba de ver, se tiene que iT_1 debe estar contenido en T_0 , luego encontramos que:

$$I = \dim(T_0) \geq \dim(iT_1) = \dim(T_1) = (2n - 2) - I,$$

de donde obtenemos que $I \geq n - 1$. Obsérvese que hemos utilizado que las fibras F_θ tienen codimensión real 2, luego esta también es la codimensión de su tangente. \square

Finalmente, hacemos la comprobación de que todos los puntos críticos de la función a_θ están contenidos en un compacto de F_θ . Este punto cobrará relevancia algo más adelante, cuando comprobemos que hay una función con una cantidad finita de puntos críticos no degenerados.

Lema 3.2.4. *Existe una constante $\eta_\theta > 0$ tal que todos los puntos críticos de a_θ están en el subespacio compacto de F_θ definido por $|f(z)| \geq \eta_\theta$.*

Demostración. Se procede por reducción al absurdo. Supongamos que existen puntos críticos en F_θ que verifican que $|f(z)|$ es arbitrariamente próximo a cero. Entonces tiene que existir un $z_0 \in \mathbb{S}_\epsilon$ que sea límite de una sucesión de estos puntos críticos y de manera que $f(z_0) = 0$. En ese caso, nos encontramos en una situación como la de las hipótesis del Lema de Selección de la Curva. Por usar las mismas notaciones que entonces, llamando:

$$U = \{z \in F_\theta : |f(z)|^2 > 0\}$$

y V al conjunto analítico dado por los puntos críticos de a_θ , se tiene $z_0 \in \overline{V \cap U}$. De este modo podemos asegurar que existe una curva diferenciable $\gamma(t)$ definida en un cierto intervalo $[0, \epsilon')$ que cumple $\gamma(0) = z_0$, luego $|f(\gamma(0))| = 0$ y que toma valores en puntos críticos de $a_\theta(z) = \log |f(z)|$ si $t > 0$. Esto último implica que a_θ debe ser constante sobre la curva, luego también debe serlo $|f(z)|$, que es estrictamente positivo en F_θ . Esto impide que la norma tienda a 0 al acercarnos a z_0 , lo que completa la prueba. \square

Recapitulemos lo que hemos conseguido hasta ahora y veamos qué nos queda por conseguir. Hemos conseguido caracterizar los puntos críticos de a_θ , que son los mismos que los de $|f|$, y calcular su índice de Morse. También hemos comprobado que todos estos puntos críticos se encuentran en un subconjunto compacto de F_θ . Sin embargo, no podemos asegurar que a_θ o $|f|$ sean funciones de Morse, es decir, cuyos puntos críticos sean todos no degenerados. Para poder solucionar este punto recurrimos al siguiente resultado que se puede encontrar en [13].

Teorema 3.2.1. *Sea g una función real de clase C^∞ sobre una variedad diferenciable M . Entonces, para cada entorno N de los puntos críticos de g existe un función real Φ en la variedad de clase C^2 de manera que sus derivadas primera y segunda convergen uniformemente en los compactos de M a las derivadas primera y segunda de g ; y de manera que*

$$g = \Phi \quad \text{en } M - N,$$

teniendo Φ a lo sumo puntos críticos no degenerados en N .

Atendiendo a este, podemos asegurar lo siguiente con respecto a las funciones con las que estamos trabajando:

Lema 3.2.5. *Existe una función diferenciable (de clase C^2) dada por*

$$s_\theta : F_\theta \rightarrow \mathbb{R}^+$$

de modo que todos los puntos críticos de s_θ son no degenerados, tienen índice de Morse mayor o igual que $n - 1$ y tal que

$$s_\theta(z) = |f(z)|$$

para puntos z con $|f(z)| < \eta_\theta$ para una cierta constante $\eta_\theta > 0$.

Demostración. El único punto que no se sigue de aplicar el teorema anterior es el concerniente al índice de los puntos de Morse. Este se deduce de la convergencia uniforme de las derivadas primera y segunda. Bajo estas hipótesis se puede asegurar (ver, por ejemplo, el lema 22.4 de [12]) que el índice de Morse de los puntos críticos de la función s_θ debe ser mayor o igual que el de los puntos críticos de $|f|$, para los cuales ya habíamos visto que eran mayores o iguales que $n - 1$.

Además, como hemos probado que todos los puntos críticos de la función a_θ (que son los mismos que los de $|f|$) verifican $|f(z)| \geq \eta_\theta$ para una cierta constante $\eta_\theta > 0$, se tiene que los valores críticos de esta función $|f|$ están acotados inferiormente y también se cumple la última condición: s_θ y $|f|$ deben coincidir para puntos $z \in F_\theta$ con $|f(z)|$ arbitrariamente próximo a cero. \square

Como los puntos críticos de s_θ son no degenerados se puede comprobar que son puntos aislados. Para dicha comprobación se puede usar por ejemplo el lema de Morse (lema 3.1.1), pues computando el gradiente de una función de Morse en dichas coordenadas, se observa que el único cero del mismo en un entorno de cada punto crítico es precisamente dicho punto crítico. Además, los puntos críticos están todos en un subespacio compacto de F_θ , como ocurría con los de a_θ pues la primera derivada converge uniformemente a la de esta función. De este modo, podemos asegurar que s_θ tiene solo una cantidad finita de dichos puntos críticos.

Con todo, ya estamos en disposición de probar el teorema 3.0.1 sobre el tipo de homotopía de la fibra de Milnor.

Demostración (del teorema 3.0.1). Prácticamente ya hemos hecho todo el trabajo necesario para llegar a una función de Morse sobre la que poder aplicar el teorema 3.1.4. Las hipótesis del mismo consisten en encontrar una función g diferenciable real sobre nuestra variedad F_θ , cuyos puntos críticos sean no degenerados y de manera que los conjuntos:

$$M^a = \{z \in F_\theta : g(z) \leq a\}$$

sean compactos. En nuestro caso, basta con tomar

$$g(z) = -\log s_\theta(z)$$

que es una función diferenciable y real, y que hereda los puntos críticos no degenerados de s_θ . Además, las subvariedades M^a son compactas pues g es propia y está acotada inferiormente.

Finalmente, puesto que el índice de Morse I de los puntos críticos de s_θ y por tanto los de $\log s_\theta$ es mayor o igual que $n - 1$, se tiene que el índice de Morse de $-\log s_\theta$ es $2(n - 1) - I \leq n - 1$. Con esto, aplicando el teorema 3.1.4 se tiene que F_θ tiene el tipo de homotopía de un CW-complejo de dimensión menor o igual que $n - 1$, compuesto por la adjunción de una celda de dimensión menor o igual que $n - 1$ por cada punto crítico de g . \square

3.3. Prueba del teorema sobre la topología del link

Gran parte de los resultados que acabamos de desarrollar se pueden utilizar para demostrar el teorema 3.0.2, y esto es lo que haremos en esta sección.

Se busca comprobar para el germen de una hipersuperficie de \mathbb{C}^n singular en el origen y dado $\epsilon > 0$ un radio de Milnor de dicho germen, para $n \geq 3$ se tiene que el $\text{Link}(f, \underline{0})$ es un espacio $(n - 3)$ -conexo.

Demostración (del teorema 3.0.2). Sea N_η el entorno de $\text{Link}(f, \underline{0})$ en \mathbb{S}_ϵ dado por:

$$N_\eta = \{z \in \mathbb{S}_\epsilon : |f(z)| \leq \eta\} = \mathbb{S}_\epsilon \cap f^{-1}(\mathbb{D}_\eta).$$

Consideramos la función

$$a : \mathbb{S}_\epsilon - \text{Link}(f, \underline{0}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad a(z) = \log |f(z)|,$$

que restringida a cada fibra nos da la función a_θ con la que hemos trabajado en la sección anterior. Siguiendo exactamente la prueba del lema 3.2.4 se puede afirmar que existe un $\eta > 0$ suficientemente pequeño tal que todos los puntos críticos de $a(z)$ satisfacen $|f(z)| \geq \eta$. De este modo $a(z)$ no tiene puntos críticos en el N_η asociado al $\eta > 0$ que acabamos de encontrar, y esto implica que N_η es una variedad diferenciable con borde que se puede ver como los conjuntos de nivel correspondientes.

Por otro lado, podemos afirmar también que los puntos críticos de la función $a(z)$ tienen todos índice mayor o igual que $n - 1$. Dicho índice es la dimensión del mayor subespacio del tangente en el que la hessiana es definida positiva. Como $a_\theta = a|_{F_\theta}$, los puntos críticos de a_θ tienen índice mayor o igual que $n - 1$ y dado $z_0 \in \mathbb{S}_\epsilon - \text{Link}(f, \underline{0})$ se tiene $T_{z_0} F_\theta \subset T_{z_0} \mathbb{S}_\epsilon$ se debe cumplir lo que enunciábamos. Así, aplicando de nuevo el teorema 3.2.1, en este caso a la función $a(z)$, podemos afirmar que existe una función de Morse

$$s : \mathbb{S}_\epsilon - \text{Link}(f, \underline{0}) \rightarrow \mathbb{R}^+$$

cuyos puntos críticos no degenerados tienen índice mayor o igual que $n - 1$ y tal que $s(z) = |f(z)|$ cuando $|f(z)|$ es suficientemente próximo a cero.

Si consideramos la función $s(z)$ restringida a $\mathbb{S}_\epsilon - \overset{\circ}{N}_\eta$ se tiene entonces que la esfera tiene el tipo de homotopía de un complejo formado adjuntando a N_η un conjunto finito de celdas de dimensión mayor o igual que $n - 1$: una por cada punto crítico de la función $s(z)$ en $\mathbb{S}_\epsilon - \overset{\circ}{N}_\eta$. Adjuntar celdas de dimensión $\geq n - 1$ no modifica los grupos de homotopía hasta orden $\leq n - 3$. Por tanto:

$$\pi_i(N_\eta) \cong \pi_i(\mathbb{S}_\epsilon)$$

para $i \leq n - 3$. Como estamos trabajando en $n \geq 3$, estas esferas tienen dimensión $2n - 1 \geq 5$, y por tanto sus grupos de homotopía son nulos hasta orden $i \leq 2n - 1$, luego en particular para orden $i \leq n - 3$.

Para concluir la prueba basta con ver que $\text{Link}(f, \underline{0})$ es un retracto de deformación de su entorno N_η . Esto se ve levantando el retracto de deformación que contrae el disco cerrado de radio $\eta > 0$ al origen. Así, $\pi_i(\text{Link}(f, \underline{0})) \cong \pi_i(N_\eta)$ y tenemos lo que queríamos. \square

Capítulo 4

Hipersuperficies con una singularidad aislada

Todos los resultados que hemos obtenido hasta el momento son válidos para cualquier hipersuperficie singular. Sin embargo, en caso de que estudiemos una hipersuperficie con una singularidad aislada en el origen, se pueden extraer algunas conclusiones más que resultan interesantes. En este capítulo, comenzaremos viendo en la sección 4.1 cómo se pueden combinar las condiciones de transversalidad que hemos trabajado en el caso particular de singularidades aisladas. Posteriormente, en la sección 4.2 estudiaremos que en este caso, el teorema de fibración de Milnor implica que la esfera de Milnor admite una descomposición de libro abierto con el link como visagra. Finalmente, dedicaremos las últimas secciones a afinar el resultado sobre el tipo de homotopía de las fibras. En este caso, se verifica el siguiente enunciado.

Teorema 4.0.1. *Si $(V(f), \underline{0})$ tiene en $\underline{0}$ una singularidad aislada, entonces las fibras de Milnor tienen el tipo de homotopía de un bouquet de esferas de dimensión $n - 1$.*

Para demostrarlo, se hace uso de numerosas herramientas de topología algebraica. Aquí, primero comprobaremos que las fibras tienen la homología de un punto para orden menor a $n - 1$, como sucede con el bouquet. Posteriormente explicitaremos una inclusión de un modelo homotópico del bouquet de esferas en la fibra, inclusión que resultará ser una equivalencia homotópica. No comprobaremos que se tiene dicha equivalencia homotópica, pues involucra herramientas de homología algo alejadas de las que venimos usando en el trabajo. Sin embargo, esta sería la forma de terminar la demostración del lema 4.0.1.

4.1. Condiciones de transversalidad

Antes de nada, merece la pena ver cómo en el caso de singularidades aisladas se pueden combinar la proposición 1.2.1 (que sólo es válida en este caso) y el lema 2.5.1 para obtener un resultado más fuerte que será muy útil en las demostraciones del capítulo.

Recordemos primero estos resultados. Sea el germen de una hipersuperficie $(V(f), \underline{0})$ con una singularidad aislada en el origen. La proposición 1.2.1 nos asegura que para $\epsilon > 0$ radio de Milnor, la hipersuperficie $V(f)$ interseca transversalmente a la esfera de Milnor \mathbb{S}_ϵ . Por su lado, el lema 2.5.1 nos dice que para dicho radio de Milnor, existe un $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que para cada $t \in \mathbb{C}$ con $0 < |t| \leq \delta$ la fibra $f^{-1}(t)$ interseca transversalmente a \mathbb{S}_ϵ . Poniendo en conjunto ambos resultados tenemos que podemos incluir la fibra del 0 en el segundo lema.

Lema 4.1.1. Si $(V(f), \underline{0})$ tiene una singularidad aislada en $\underline{0}$, dado un radio de Milnor $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que para cada $t \in \mathbb{D}_\delta$ la fibra $f^{-1}(t)$ interseca transversalmente a \mathbb{S}_ϵ .

El poder incluir esta fibra tiene una consecuencia importante.

Lema 4.1.2. En las hipótesis anteriores, $f^{-1}(\mathbb{D}_\delta) \cap \mathbb{S}_\epsilon$ es difeomorfo a $\mathbb{D}_\delta \times \text{Link}(f, \underline{0})$. En particular, es una variedad diferenciable con borde.

Es más, el difeomorfismo g entre ambos espacios hace comutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(\mathbb{D}_\delta) \cap \mathbb{S}_\epsilon & \xrightarrow{g} & \mathbb{D}_\delta \times \text{Link}(f, \underline{0}) \\ f \downarrow & & \swarrow \pi_1 \\ \mathbb{D}_\delta & & \end{array}$$

Demostración. Por las hipótesis, tenemos transversalidad de las fibras $f^{-1}(s)$ con $s \in \mathbb{D}_\delta$ y la esfera \mathbb{S}_ϵ , luego f restringida a $f^{-1}(\mathbb{D}_\delta) \cap \mathbb{S}_\epsilon$ es una submersión. Así, al ser también una aplicación propia (continua en un dominio compacto) tenemos que es una fibración localmente trivial sobre su imagen, que es \mathbb{D}_δ . Además, como el disco es contractible, de hecho podemos asegurar que es una fibración trivial. De ahí se deduce que $f^{-1}(\mathbb{D}_\delta) \cap \mathbb{S}_\epsilon$ es difeomorfo al producto $\mathbb{D}_\delta \times F$ con F una de las fibras de la aplicación f , que son todas difeomorfas entre sí. En particular si consideramos la fibra dada por $f^{-1}(0) \cap \mathbb{S}_\epsilon = \text{Link}(f, \underline{0})$ se tiene el resultado. \square

Ante esto, se deduce el siguiente resultado..

Lema 4.1.3. El espacio $\overline{F_\theta} \cap (f^{-1}(\mathbb{D}_\delta) \cap \mathbb{S}_\epsilon)$ es una subvariedad con borde difeomorfa a $[0, \delta] \times \text{Link}(f, \underline{0})$.

Demostración. Basta con tomar restricciones en el diagrama comutativo anterior para un $\theta \in \mathbb{R}$ fijo

$$\begin{array}{ccc} \overline{F_\theta} \cap (f^{-1}(\mathbb{D}_\delta) \cap \mathbb{S}_\epsilon) & \xrightarrow{g'} & \{\rho e^{i\theta} : \rho \in [0, \delta]\} \times \text{Link}(f, \underline{0}) \\ f \downarrow & & \swarrow \pi_1 \\ \{\rho e^{i\theta} : \rho \in [0, \delta]\} & \subset & \mathbb{D}_\delta \end{array}$$

y tener en cuenta que son difeomorfos

$$\{\rho e^{i\theta} : \rho \in [0, \delta]\} \cong [0, \delta].$$

4.2. Estructura de libro abierto

Expondremos ahora una aplicación interesante del teorema de fibración de Milnor 2.4.1, para el caso en que en $\underline{0}$ tengamos una singularidad aislada. Para ello es necesario introducir algunos conceptos nuevos.

Definición 4.2.1. Una *descomposición de libro abierto* de una variedad diferenciable M consiste en una subvariedad N de codimensión 2 en M , denominada *visagra*, que verifica las siguientes propiedades.

- a) La subvariedad N se embebe en M con fibrado normal trivial. En este contexto, el espacio normal en cada punto se define como el complemento ortogonal de su espacio tangente.

- b) Además el complementario $M - N$ admite una fibración diferenciable localmente trivial sobre \mathbb{S}^1 :

$$\phi : M - N \rightarrow \mathbb{S}^1,$$

que debe verificar lo siguiente. Consideremos un entorno tubular U de N en M , es decir, un entorno de N difeomorfo a $N \times \mathbb{D}^2$, con \mathbb{D}^2 el disco en dimensión 2. Entonces la aplicación ϕ restringida a $U - N$, que es difeomorfo a $N \times (\mathbb{D}^2 - \{0\})$, debe coincidir con la función argumento

$$(x, y) \rightarrow \frac{y}{\|y\|}.$$

Las fibras de ϕ se denominan *páginas* del libro abierto, y como hemos visto en la definición de fibración localmente trivial, son todas difeomorfas cuando M es conexa.

Además, cada página se compactifica añadiendo la visagra N . Esto se puede comprobar viendo a que la clausura de cada página intersecada con U se obtiene añadiéndole el espacio N . Más adelante lo probaremos para un caso concreto, aunque el procedimiento que veremos se puede generalizar. Con estas definiciones, podemos afirmar los siguiente.

Proposición 4.2.1. *Sea $(V(f), \underline{0})$ el germen de una hipersuperficie con f holomorfa y $\underline{0}$ una singularidad aislada de dicha hipersuperficie. Si $\epsilon > 0$ es un radio de Milnor de dicho conjunto analítico en torno a $\underline{0}$, entonces la esfera de Milnor \mathbb{S}_ϵ admite una descomposición de libro abierto con visagra el $\text{Link}(f, \underline{0})$.*

Demostración. Esto se deduce casi de forma directa aplicando el teorema de la fibración de Milnor 2.4.1. Como la singularidad es aislada, el link es liso, y tiene su dimensión bien definida. El $\text{Link}(f)$ tiene codimensión 2 en \mathbb{S}_ϵ pues

$$\dim(\text{Link}(f)) = \dim(V(f)) + \dim(\mathbb{S}_\epsilon) - 2n = \dim(V(f)) - 1 = 2n - 3.$$

Por el lema 1.2.1, a partir de un cierto radio $\epsilon > 0$ la hipersuperficie $V(f)$ es transversa a la esfera \mathbb{S}_ϵ . Con esta hipótesis, el lema 4.1.2 nos permite concluir que el fibrado normal del $\text{Link}(f, \underline{0}) = \mathbb{S}_\epsilon \cap V(f)$ en \mathbb{S}_ϵ es trivial, y nos da la estructura de producto de un entorno tubular $f^{-1}(\mathbb{D}_\delta) \cap \mathbb{S}_\epsilon$ del $\text{Link}(f, \underline{0})$. Por tanto, la fibración de Milnor $\phi = \frac{f}{\|f\|}$ cumple la propiedad b) tomando $U = f^{-1}(\mathbb{D}_\delta) \cap \mathbb{S}_\epsilon$. \square

Con el desarrollo que hemos elaborado, también es sencillo comprobar que las fibras de Milnor se compactifican añadiéndoles el link. Está claro que $\overline{F_\theta} \subset F_\theta \cup \text{Link}(f, \underline{0})$. El lema 4.1.3 nos da el otro contenido en la intersección con el U que explicitábamos antes.

4.3. Homología para orden menor que $n - 1$

Sea $(V(f), \underline{0})$ el germen de una hipersuperficie con una singularidad aislada en el origen. Sea $\epsilon > 0$ un radio de Milnor para dicho germen. En esta sección, el objetivo principal es probar el siguiente resultado.

Proposición 4.3.1. *La fibra de Milnor F_θ del teorema 2.4.1 tiene la homología de un punto para órdenes menores a $n - 1$.*

Demostración. Se debe comprobar que la fibra tiene por grupos de homología $H_0(F_\theta) = \mathbb{Z}$ y el resto triviales hasta $H_{n-2}(F_\theta)$ (inclusive). Si tomamos los grupos de homología reducidos, basta con comprobar que todos estos hasta el de orden $n - 2$ son triviales. Para hacer esto, aplicaremos el siguiente resultado que es un teorema importante de topología algebraica.

Teorema 4.3.1 (de dualidad de Alexander). *Si K es un subespacio propio de \mathbb{S}^n compacto, localmente contractible y no vacío, entonces se tiene que los grupos de homología reducidos $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - K)$ son isomorfos a los grupos de cohomología $\tilde{H}^{n-i-1}(K)$ para cada orden i .*

Observamos que sobre $\overline{F_\theta}$ podemos aplicar el teorema de dualidad de Alexander, pues tenemos que en efecto es un conjunto contenido en la esfera \mathbb{S}_ϵ de dimensión $2n - 1$ compacto, no vacío, y localmente contrátil. Esto último se debe a que es una variedad diferenciable, localmente difeomorfa a un cierto \mathbb{R}^m , que es contrátil. A partir de esto tenemos que los grupos de homología reducidos $\tilde{H}_i(\mathbb{S}_\epsilon - \overline{F_\theta})$ son isomorfos a los grupos de cohomología $\tilde{H}^{2(n-1)-i}(\overline{F_\theta})$. Estos últimos son triviales para valores de i tales que $2(n-1) - i > n-1$ (es decir cuando $i < n-1$) al tener esta fibra el tipo de homotopía de un CW-complejo de dimensión $n-1$. Así, los grupos de homología reducida de $\mathbb{S}_\epsilon - \overline{F_\theta}$ son triviales para órdenes menores que $n-1$.

Finalmente, comprobamos que $\mathbb{S}_\epsilon - \overline{F_\theta}$ tiene el mismo tipo de homotopía que la fibra F_θ . Esto se debe a que dicho complementario es $\mathbb{S}_\epsilon - (F_\theta \cup \text{Link}(f, 0))$, que está fibrado localmente sobre el espacio $\mathbb{S}^1 - \{e^{i\theta}\}$ que es contrátil. Así, la fibración es trivial y se tiene un difeomorfismo entre $\mathbb{S}_\epsilon - \overline{F_\theta}$ y $(\mathbb{S}^1 - \{e^{i\theta}\}) \times F_\theta$. Como este último espacio tiene el tipo de homotopía de F_θ (el otro factor del producto se contrae a un punto) se tiene la equivalencia homotópica que buscábamos. Con esto concluimos que $\mathbb{S}_\epsilon - \overline{F_\theta}$ tiene el mismo tipo de homotopía que la fibra F_θ . Así, sus grupos de homología son isomorfos, y tenemos lo que queríamos. \square

Como decíamos anteriormente, el bouquet de esferas de dimensión $n-1$ también verifica que su homología para órdenes menores que $n-1$ es la del punto. En efecto, si denotamos por

$$\bigvee_{i=1}^N \mathbb{S}_i^{n-1}$$

al bouquet de N esferas de dimensión $n-1$, entonces se tiene que sus grupos de homología con coeficientes en \mathbb{Z} son:

$$H_k \left(\bigvee_{i=1}^N \mathbb{S}_i^{n-1} \right) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0, \\ \bigoplus_{i=1}^N \mathbb{Z} & \text{si } k = n-1, \\ 0 & \text{si } k \neq 0, n-1. \end{cases}$$

Estos grupos se calculan utilizando sucesiones de Mayer-Vietoris.

4.4. Puntos críticos no degenerados o singularidades de Morse

Un procedimiento para estudiar singularidades consiste en deformarlas a otras más sencillas. El prototipo de punto singular más sencillo es el dado por un punto crítico no degenerado. Para funciones complejas, este se define como sigue.

Definición 4.4.1. Dada $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ con $U \subset \mathbb{C}^n$ un conjunto abierto. Un punto $z_0 \in U$ es un *punto crítico no degenerado* de f si y solo si es un punto crítico tal que la Hessiana de f en z_0 es no degenerada.

Además, el lema de Morse que veíamos con anterioridad (lema 3.1.1), también se puede enunciar para el caso complejo. Sin embargo, en esta nueva formulación hay un cambio significativo. Este se encuentra relacionado con el hecho de que en el caso complejo no tiene sentido hablar de índice de un punto crítico no degenerado, al no tener tampoco sentido el concepto de signatura de una forma bilineal.

Lema 4.4.1 (de Morse para funciones complejas). *Si z_0 es un punto crítico no degenerado de una función diferenciable $f : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, entonces existe un difeomorfismo local $\varphi : (\mathbb{C}^n, \underline{0}) \rightarrow (\mathbb{C}^n, \underline{0})$, tal que*

$$f \circ \varphi(z_1, \dots, z_n) = f(z_0) + \sum_{i=1}^n z_i^2.$$

En particular, con esto se ve que los puntos críticos no degenerados son aislados.

Aplicando este resultado al estudio que estamos realizando, obtenemos una consecuencia importante. Supongamos que tenemos el germen de una hipersuperficie $(V(f), \underline{0})$ con f una función holomorfa que cumple $f(\underline{0}) = 0$, que tiene un punto crítico no degenerado en el origen. Se cumple lo siguiente.

Teorema 4.4.1. *El tipo de homotopía de la fibra de Milnor en el tubo definida en 2.5.1 en torno a un punto crítico no degenerado es el de una esfera de dimensión $n - 1$.*

Demostración. Por el lema 4.4.1 podemos afirmar que para un entorno suficientemente próximo al origen, por ejemplo, una bola de Milnor \mathbb{B}_ϵ con radio $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, existe un cambio de coordenadas ϕ definido en dicho entorno tal que

$$f \circ \phi(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i=1}^n z_i^2 =: g(z_1, \dots, z_n).$$

Así, las fibras lisas de la función f restringida a dicha bola son difeomorfas al espacio:

$$V_s = g^{-1}(s) \cap \mathbb{B}_\epsilon = \phi^{-1}(f^{-1}(s)) \cap \mathbb{B}_\epsilon = \{z \in \mathbb{B}_\epsilon : z_1^2 + \dots + z_n^2 = s\},$$

con $s \neq 0$, pues el 0 es valor crítico. Nótese que estos espacios, para $|s| = \delta$ suficientemente pequeño son las fibras de Milnor en el tubo (ver teorema 2.5.1). Como sabemos que todas estas fibras son difeomorfas entre sí, basta con que nos fijemos en la fibra con $s = \delta$ real.

Dividiendo cada coordenada z_k en sus componentes real e imaginaria, se tiene que para cada punto $(z_1, \dots, z_n) \in V_\delta$:

$$\sum_{k=1}^n z_k^2 = \sum_{k=1}^n (a_k + ib_k)^2 = \sum_{k=1}^n (a_k^2 - b_k^2) + 2i \sum_{k=1}^n a_k b_k = \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^n (a_k^2 - b_k^2) = \delta, \quad \sum_{k=1}^n a_k b_k = 0.$$

Y además, como $V_\delta \subset \mathbb{B}_\epsilon$, se tiene

$$\sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \epsilon.$$

El espacio definido por estas ecuaciones es difeomorfo al fibrado tangente de la esfera de dimensión $n - 1$: $T\mathbb{S}^{n-1}$. Ello se debe a que si fijamos por ejemplo el vector de partes imaginarias dado por $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, combinando las ecuaciones con las sumas de cuadrados, tenemos que debe cumplir

$$\sum_{k=1}^n b_k^2 \leq \frac{1}{2}(\epsilon - \delta)$$

luego (b_1, \dots, b_n) está en un disco de dimensión n : \mathbb{D}^n . El vector de partes reales $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ que le corresponde debe pertenecer al complemento ortogonal a este vector, que es un espacio isomorfo a \mathbb{R}^n . Además, por la igualdad de la suma de cuadrados, despejando la resta en las componentes b_i^2 , encontramos que (a_1, \dots, a_n) deberá estar sobre la esfera de dimensión $n - 1$. Por tanto: $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{D}^n$, siendo este espacio difeomorfo a $T\mathbb{S}^{n-1}$. El fibrado tangente $T\mathbb{S}^{n-1}$ tiene el tipo de homotopía de la esfera \mathbb{S}^{n-1} , al ser el disco contractible. \square

Con esto, tenemos totalmente identificado el tipo de homotopía de las fibras en el tubo para el caso de una singularidad aislada no degenerada: es el de la esfera de dimensión $n - 1$. Obsérvese que esto es, en particular, un bouquet de esferas con una única esfera. Sin embargo, una función f cualquiera no tiene por qué tener un punto crítico no degenerado en la singularidad que estemos estudiando. Lo que haremos por tanto, será llevar una función general a otra cuyos puntos críticos sí sean no degenerados: su morsificación.

4.5. Existencia de morsificaciones

Comenzamos introduciendo el concepto de morsificación. Sea $f : (\mathbb{C}^n, \underline{0}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ el germen de una función analítica con representante $f : \mathbb{B}_\epsilon \rightarrow \mathbb{C}$ definido al menos en la bola de Milnor \mathbb{B}_ϵ , que cumple $f(\underline{0}) = 0$.

Definición 4.5.1. Una *morsificación* de f es una deformación de dicha función, es decir, una familia de aplicaciones analíticas f_λ inducida por una aplicación diferenciable $F : \mathbb{B}_\epsilon \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ de manera que $f_\lambda(z) := F(z, \lambda)$ y $f_0 = f$, que cumple que $f_\lambda|_{\mathbb{B}_\epsilon}$ tiene una cantidad finita de puntos críticos y son todos no degenerados para todo $\lambda \in (0, \lambda_0]$, para un cierto $\lambda_0 > 0$.

Para el caso en que tengamos una singularidad aislada en $\underline{0}$, podemos asegurar que existe una morsificación con una forma concreta de la función que define la hipersuperficie. Para verlo, necesitamos conocer el siguiente teorema.

Teorema 4.5.1 (de Sard). *Dada $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable, el conjunto de sus valores críticos es de medida 0. Además, si $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ es analítica compleja y propia, entonces el conjunto de valores críticos es un subconjunto analítico.*

Teorema 4.5.2. *Si $(V(f), \underline{0})$ tiene una singularidad aislada en $\underline{0}$ entonces existe una morsificación de f de la forma $f_\lambda = f - \lambda(a_1 z_1 + \dots + a_n z_n)$ para cierto vector $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. Además, se puede elegir el vector (a_1, \dots, a_n) de manera que los puntos críticos de f_λ tengan valores críticos distintos para cada λ .*

Demostración. Aquí no probaremos la segunda parte de este teorema, por la cual se asegura que la morsificación se puede escoger con sus valores críticos distintos dos a dos. La prueba de este resultado se puede consultar en [5]. Veamos por tanto que los puntos críticos de la función f_λ del enunciado son todos no degenerados y constituyen un conjunto finito. Denotamos por $g_a(z) := a_1 z_1 + \dots + a_n z_n$.

Dada $f_\lambda := f - \lambda g_a$, sus puntos críticos son los puntos que pertenecen a $df^{-1}(\lambda a)$. Además, $x \in df^{-1}(\lambda a)$ será un punto crítico no degenerado de f_λ si $|\text{Hess}_f(x)| \neq 0$ donde $\text{Hess}_f(x)$ es la matriz Hessiana de f en x .

Como Hess_f es la jacobiana de df , tenemos que $f - \lambda g_a$ tiene solo puntos críticos no degenerados si todos los puntos de $df^{-1}(\lambda a)$ son puntos regulares de df . Es decir: si λa es un valor regular de df . Como el conjunto de valores críticos Δ de $df : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ es, por el Teorema de Sard, un conjunto analítico de codimensión positiva, podemos tomar un segmento en \mathbb{C}^n con origen en $\underline{0}$ que no toque a $\Delta - \{\underline{0}\}$. Sea a el otro extremo del segmento. Entonces para todo $\lambda \in (0, 1]$ tenemos que $f_\lambda = f - \lambda g_a$ solo tiene puntos críticos no degenerados.

Además, cada función f_λ tiene una cantidad finita de puntos críticos no degenerados. Ello se debe a que los puntos críticos no degenerados son aislados, la prueba de esto es análoga a la del caso real. Así, forman un conjunto discreto en el compacto dado por \mathbb{B}_ϵ , que debe ser finito \square

Concluimos la sección con la siguiente observación. En realidad, para la morsificación que hemos

encontrado, podríamos haber considerado $\lambda \in \mathbb{D}_{\lambda_0}$ para $\lambda_0 > 0$ suficientemente pequeño. Así, el parámetro variaría en los complejos y no en el intervalo que veíamos, lo cual resultará útil en la sección siguiente.

4.6. Tipo de homotopía de las fibras

Habiendo desarrollado todas las herramientas necesarias para ello, pasamos a construir la inclusión que hemos comentado. Queremos comprobar que existe un modelo homotópico al bouquet de esferas de dimensión $n - 1$, es decir, un espacio con el mismo tipo de homotopía que este bouquet, contenido en la fibra de Milnor.

Sea $f : (\mathbb{C}^n, \underline{0}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ el germen de una función analítica. Supongamos que tiene una singularidad aislada en en el origen. Tomamos la morsificación que nos da el teorema 4.5.2, en la forma $f_\lambda = f + \lambda g$. Consideramos la función

$$\overline{F} : \mathbb{B}_\epsilon \times \mathbb{D}_{\lambda_0} \rightarrow \mathbb{B}_\epsilon \times \mathbb{D}_{\lambda_0}, \quad \overline{F}(z, \lambda) := (F(z, \lambda), \lambda)$$

con $F(z, \lambda) = f_\lambda(z)$. El conjunto de sus puntos críticos es la unión de los puntos críticos de la familia f_λ con $\lambda \in \mathbb{D}_{\lambda_0}$. En efecto, si consideramos la diferencial de \overline{F} , obtenemos la siguiente matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} df_\lambda & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así, los menores de esta matriz que se anulen y contengan elementos de la última fila, desarrollando el determinante por dicha fila, conllevan que se anule la parte del menor contenida en df_λ .

Lema 4.6.1. *Sobre esta morsificación, podemos afirmar que existen $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ y $\lambda_0 > 0$ tales que se verifican las siguientes propiedades.*

1. La fibra $f_\lambda^{-1}(s)$ es transversal a la esfera \mathbb{S}_ϵ para todo $s \in \mathbb{D}_\delta$ y para todo $\lambda \in \mathbb{D}_{\lambda_0}$.
2. Los valores críticos de f_λ están en el interior del disco \mathbb{D}_δ para todo $\lambda \in \mathbb{D}_{\lambda_0}$.
3. La fibra de Milnor de f en el tubo dada por $f^{-1}(s) \cap \mathbb{B}_\epsilon$ es difeomorfa a $f_\lambda^{-1}(s) \cap \mathbb{B}_\epsilon$ para todo $\lambda \in \mathbb{D}_{\lambda_0}$ y todo $s \in \partial \mathbb{D}_\delta$.

Demostración. Vamos viendo las propiedades una a una.

1. Para comprobar la transversalidad, procedemos como sigue. Sabemos que para $\overline{F}(z, 0) = (f(z), 0)$ existen un $\epsilon > 0$ y un $\delta > 0$ tales que para cada $t \in \mathbb{D}_\delta$ la fibra $f^{-1}(t)$ interseca transversalmente a la esfera de Milnor \mathbb{S}_ϵ . Sea $p \in f^{-1}(\mathbb{D}_\delta) \cap \mathbb{S}_\epsilon$ un punto en dicha intersección. La transversalidad en dicho punto es una propiedad abierta, luego existe un entorno abierto U_p en $\overline{F}^{-1}(\mathbb{D}_\delta \times \mathbb{D}_{\lambda_0})$ tal que si $\overline{F}(z, \lambda) = (s, \lambda)$ para $(z, \lambda) \in U_p$, entonces $f_\lambda^{-1}(s)$ interseca transversalmente a \mathbb{S}_ϵ en (z, λ) . Así \overline{F} es submersión, luego $\overline{F}(U_p)$ es abierto. Tomamos $\delta_p > 0$ y $\lambda_p > 0$ tales que $\mathbb{D}_{\delta_p} \times \mathbb{D}_{\lambda_p} \subset \overline{F}(U_p)$, por lo que $f_\lambda^{-1}(s)$ también es transversal a \mathbb{S}_ϵ en los puntos de $(s, \lambda) \in \mathbb{D}_{\delta_p} \times \mathbb{D}_{\lambda_p}$. Considerando los entornos correspondientes a los U_p que se obtienen restringiendo al espacio $f^{-1}(\mathbb{D}_\delta) \cap \mathbb{S}$ (tomando $\lambda = 0$), tenemos un recubrimiento por abiertos del mismo. Como es un compacto, basta con quedarse con una cantidad finita de estos. Tomando λ_0 el mínimo de entre los λ_p y el δ mínimo entre los δ_p que correspondan a los entornos seleccionados, se tiene el resultado.

2. Sabemos que existe el $\delta > 0$ que cumple que

$$f|_{f^{-1}(\partial \mathbb{D}_\delta) \cap \mathbb{B}_\epsilon}$$

es una submersión. Ser submersión también es una propiedad abierta. Como antes, para cada punto del tubo $p \in f^{-1}(\partial\mathbb{D}_\delta) \cap \mathbb{B}_\epsilon$ consideramos el entorno U_p de

$$\overline{F}^{-1}(\partial\mathbb{D}_\delta \times \mathbb{D}_{\lambda_0})$$

para el que se mantiene la propiedad: \overline{F} es submersión en dicho entorno. Consideramos los $\lambda_p > 0$ y $\delta_p > 0$ como antes. Nos quedamos con una cantidad finita por la compacidad del tubo y tomamos los mínimos, redefiniendo si es necesario los $\lambda_0 > 0$ y $\delta > 0$ anteriores.

3. Finalmente, esta propiedad se obtiene a partir del teorema de Ehresmann 2.3.1 y de las propiedades 1 y 2. Se considera la restricción:

$$\overline{F} |_{\overline{F}^{-1}(\partial\mathbb{D}_\delta \times \mathbb{D}_{\lambda_0})}.$$

Se observa que el espacio $\overline{F}^{-1}(\partial\mathbb{D}_\delta \times \mathbb{D}_{\lambda_0})$ es una variedad con borde dado por

$$\overline{F}^{-1}(\partial\mathbb{D}_\delta \times \mathbb{D}_{\lambda_0}) \cap (\mathbb{S}_\epsilon \times \partial\mathbb{D}_{\lambda_0}).$$

Como sabemos que los valores críticos de f están en el interior de \mathbb{D}_δ para todo $\lambda \in \mathbb{D}_{\lambda_0}$ y por la condición de transversalidad sobre la esfera se tiene que \overline{F} es submersión en el interior del espacio. Que \overline{F} sea submersión en el borde de la variedad también nos lo da la propiedad 1 de transversalidad. Además, se tiene que es una función propia por ser continua en un dominio compacto. Por el teorema de Ehresmann es una fibración localmente trivial, y esto prueba lo que buscábamos.

Con estas preparaciones realizadas, pasamos a ver cómo es el modelo homotópico del bouquet de esferas que vamos a incluir en la fibra de Milnor. La situación que vamos a describir a continuación queda reflejada en la figura 4.1. Fijamos $\lambda \leq \lambda_0$. Supongamos que la morsificación tiene N puntos críticos no degenerados para f_λ con $\lambda \in \mathbb{D}_{\lambda_0}^*$. Llamamos p_i con $i = 1, \dots, N$ a dichos puntos críticos, y v_i con $i = 1, \dots, N$ a los valores críticos que les corresponden, que podemos suponer por el teorema 4.5.2 que son distintos dos a dos y están contenidos en \mathbb{D}_δ . Para cada uno de estos puntos críticos, podemos considerar su bola de Milnor centrada en p_i que denotamos por $\mathbb{B}_{\epsilon_i}(p_i) \subset \mathbb{B}_\epsilon$ y el disco centrado en v_i que le corresponde $\mathbb{D}_{\delta_i}(v_i) \subset \mathbb{D}_\delta$ para establecer la fibración de Milnor en el tubo en torno a p_i según teorema 2.5.1. Como los p_i son puntos críticos no degenerados, el tipo de homotopía de las fibras $f_\lambda^{-1}(s_i) \cap \mathbb{B}_{\epsilon_i}$ para cada $s_i \in \mathbb{D}_{\delta_i}$ es el de una esfera de dimensión $n - 1$.

En el disco \mathbb{D}_δ , escogemos un valor regular en la frontera $s \in \partial\mathbb{D}_\delta$. Trazamos caminos disjuntos desde dicho punto s a cada uno de los valores regulares v_i y que corten a $\partial\mathbb{D}_{\delta_i}(v_i)$ una sola vez. Llamamos s_i al punto que se encuentra en dicha intersección. Así, dividimos los caminos en dos partes: la primera, a la que denominamos α_i , que va de s a s_i para cada $i = 1, \dots, N$ y la segunda, a la que llamamos β_i que va de s_i al valor crítico v_i para cada $i = 1, \dots, N$. Definimos:

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^N \alpha_i, \quad \overline{\Gamma} = \bigcup_{i=1}^N (\alpha_i \cup \beta_i).$$

Se cumple que f_λ es una fibración localmente trivial restringida a $f_\lambda^{-1}(\Gamma)$ sobre Γ . Para verlo, se aplica el teorema de Ehresmann como ya hemos hecho otras veces, donde la submersión sobre la frontera se tiene gracias a las hipótesis de transversalidad. Como Γ es un espacio contractible, se tiene que de hecho, la fibración es trivial, luego el espacio tiene la estructura del siguiente producto

$$f_\lambda^{-1}(\Gamma) \cong (f_\lambda^{-1}(s) \cap \mathbb{B}_\epsilon) \times \Gamma.$$

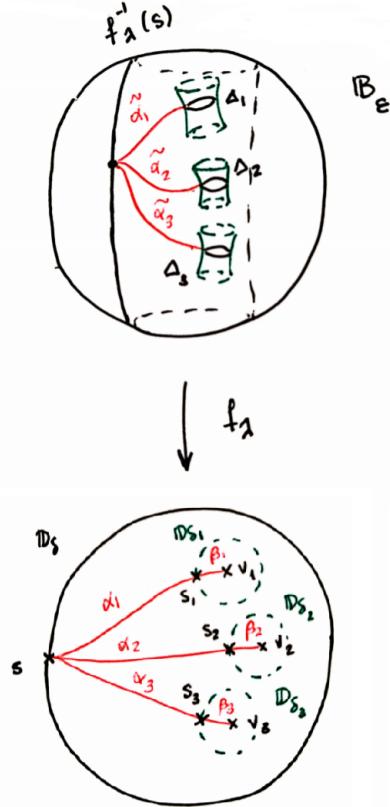


Figura 4.1: Diagrama del modelo homotópico al bouquet de esferas contenido en la fibra de Milnor.

Denominamos al modelo homotópico que nos interesa por Y . Definimos este como sigue. Denominamos Δ_i a un espacio homotópicamente equivalente a \mathbb{S}^{n-1} con $\Delta_i \subset f_\lambda^{-1}(s_i) \cap \mathbb{B}_{\epsilon_i}$, siendo la inclusión una equivalencia homotópica. Fijamos $q \in f_\lambda^{-1}(\partial D\Delta_i) \cap \mathbb{B}_\epsilon$. Sean $\tilde{\alpha}_i$ levantamientos de los caminos α_i en la bola \mathbb{B}_ϵ , que cumplen $\alpha_i = f_\lambda \circ \tilde{\alpha}_i$. Podemos asumir, por la estructura de producto que acabamos de ver, que uno de los extremos de estos caminos estará en q y el otro estará sobre la fibra $f_\lambda^{-1}(s_i) \cap \mathbb{B}_{\epsilon_i}$ para cada camino con $i = 1, \dots, N$. Con estos elementos, definimos

$$Y := \bigcup_{i=1}^N (\tilde{\alpha}_i \cup \Delta_i) \subset f_\lambda^{-1}(\Gamma).$$

Este espacio tiene el tipo de homotopía de un bouquet de N esferas de dimensión $n - 1$ por construcción. Veamos por último que está contenido en un espacio con tipo de homotopía el de la fibra $f_\lambda^{-1}(s) \cap \mathbb{B}_\epsilon$.

Esto se debe a que, por ser Γ contractible, se verifica que $(f_\lambda^{-1}(s) \cap \mathbb{B}_\epsilon) \times \Gamma$ tiene el mismo tipo de homotopía que la fibra $f_\lambda^{-1}(s) \cap \mathbb{B}_\epsilon$. Por tanto hemos construido Y un espacio con el tipo de homotopía del bouquet de N esferas de dimensión $n - 1$ contenido en $f_\lambda^{-1}(\Gamma)$, espacio que tiene el tipo de homotopía de la fibra $f_\lambda^{-1}(s) \cap \mathbb{B}_\epsilon$ y esto concluye la prueba que buscábamos.

Como ya hemos comentado, se puede demostrar que esta inclusión que acabamos de encontrar es de hecho una equivalencia homotópica. Para ello, se comprueba que la inclusión induce un isomorfismo entre los grupos de homología de Y y de la fibra $f_\lambda^{-1}(s) \cap \mathbb{B}_\epsilon$. Para ver que esto

conlleva la equivalencia homotópica, se hace uso de los dos siguientes teoremas fundamentales de topología algebraica.

Teorema 4.6.1 (de Whitehead). *Sean X e Y dos CW-complejos conexos. Si una función continua $f : X \rightarrow Y$ induce isomorfismos $f_* : \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$ entre todos sus grupos de homotopía, entonces f es una equivalencia homotópica.*

Teorema 4.6.2 (de Hurewicz). *Si un espacio X es $(n - 1)$ -conexo con $n \geq 2$, entonces los grupos de homología reducida $\tilde{H}_i(X)$ son 0 para $i < n$ y $\pi_n(X)$ es isomorfo a $H_n(X)$.*

Ambos teoremas se combinan en el siguiente corolario que es el que permite concluir el resultado.

Corolario 4.6.2.1. *Una aplicación $f : X \rightarrow Y$ entre CW-complejos simplemente conexos que induce isomorfismos entre sus grupos de homología $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ para todo orden n es una equivalencia homotópica.*

Las pruebas y enunciados de estos resultados pueden consultarse en [7]. A la vista de estos, hay que comprobar que los espacios son simplemente conexos, y al darnos la inclusión el isomorfismo entre de homología de la fibra y el bouquet, se concluye que constituye una equivalencia homotópica. Esto nos conduce a un resultado importante.

Lema 4.6.2. *El número N de puntos críticos no degenerados que aparecen al tomar una morsificación de una función holomorfa $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ con $U \subset \mathbb{C}^n$ abierto no depende de la morsificación, y es siempre el mismo.*

Esto se debe a que acabamos de ver que el tipo de homotopía de las fibras es el del bouquet de N esferas de dimensión $n - 1$, y el tipo de homotopía de estas solo depende del germe $f : (\mathbb{C}^n, \underline{0}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ que nos de la singularidad. En vista de este resultado, se tiene una última definición.

Definición 4.6.1. Se define el *número de Milnor* del germe de una función analítica $f : (\mathbb{C}^n, \underline{0}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, denotado por $\mu(f, \underline{0})$, como el número de puntos críticos no degenerados que aparecen en una morsificación cualquiera de f , en el sentido de la definición 4.5.1.

Apéndice A

Algunas nociones básicas de conjuntos analíticos complejos

El objeto de estudio del presente trabajo son las singularidades de conjuntos analíticos, es decir, conjuntos definidos por los ceros de funciones holomorfas. En particular, nos interesa saber cómo obtener información topológica local de las mismas utilizando herramientas geométricas y algebraicas más accesibles.

A.1. Funciones holomorfas y el anillo de series convergentes

En primer lugar, es pertinente realizar algunos comentarios sobre cómo se materializan algunas nociones relacionadas con funciones holomorfas en varias variables, con las cuales trabajaremos constantemente a lo largo de este texto. En particular, nos interesa ver cómo podemos aplicar argumentos algebraicos para trabajar con estas funciones, los cuales resultarán de gran utilidad en las secciones siguientes.

Es bien conocido que si tenemos una función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, donde $U \subset \mathbb{C}^n$ es un conjunto abierto, es equivalente decir que f es una función holomorfa a que f es una función analítica. Las funciones analíticas en U son aquellas para las que, dado un punto x cualquiera de U , existe un entorno $V \subset U$ de x y una serie de potencias, la cual converge a f en V . Lo interesante de esta discusión es que si consideramos $p \in \mathbb{C}^n$ fijo, resulta que las series de potencias que convergen en un entorno de p (el cual puede depender de la serie) forman un anillo, que se denota por $\mathcal{O}_{n,p}$. En el caso particular de las series de potencias convergentes en un entorno del $\underline{0}$, denotamos a este anillo por $\mathbb{C}\{\underline{x}\}$, $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ o simplemente \mathcal{O}_n . No olvidemos que siempre podemos llevar un punto $p \in \mathbb{C}^n$ al $\underline{0}$ vía un cambio de coordenadas lineal. Como ya hemos anunciado, en este trabajo estudiaremos el comportamiento de funciones holomorfas en entornos de un punto concreto, por lo que podremos trabajar con éstas como elementos del anillo anterior, y aplicar argumentos relacionados con las propiedades de dicho anillo.

Por último, merece la pena señalar algunas de las propiedades útiles que verifica el anillo \mathcal{O}_n . Para una exposición detallada de las mismas se puede consultar el capítulo 3 de [8], aquí simplemente enunciaremos las dos siguientes. La primera, que este constituye un *anillo noetheriano*, es decir, en el cual todos sus ideales son finitamente generados. Además, este es también un *dominio de factorización única*, luego los elementos irreducibles del anillo son precisamente los primos, y la descomposición en factores irreducibles anterior es única salvo multiplicación por unidades.

A.2. Conjuntos analíticos

Habiendo revisado los conceptos de la sección anterior, podemos pasar a definir los espacios que nos interesan: los conjuntos analíticos.

Definición A.2.1.

1. Un subconjunto $X \subset \mathbb{C}^n$ se dice *localmente analítico* si para cada punto $p \in X$ existe un entorno abierto $U_p \subset \mathbb{C}^n$ de p y un conjunto finito de funciones holomorfas f_1, \dots, f_s definidas en U_p de manera que

$$X \cap U_p = \{z \in U_p : f_1(z) = \dots = f_s(z) = 0\}.$$

A un conjunto de este tipo lo denominaremos $V(f_1, \dots, f_n)$.

2. Sea un U un conjunto abierto de \mathbb{C}^n . Un subconjunto $X \subset U$ se denomina *subconjunto analítico* de U si X es localmente analítico, y cerrado en U .
3. Si directamente tomamos $X \subset \mathbb{C}^n$ localmente analítico y cerrado, podemos denominarlo simplemente *conjunto analítico*. En este caso podemos asegurar que para cada $p \in \mathbb{C}^n$ existe un entorno suyo U_p de modo que $X \cap U_p$ se puede definir como los ceros de un conjunto finito de funciones holomorfas definidas en U_p . Por ser X cerrado, en caso de que $p \notin X$, se puede escoger dicho entorno de modo que la intersección con X sea vacía, y por ello podemos asegurar lo anterior.

El concepto de función holomorfa se extiende de forma natural para definirlas en estos conjuntos.

Definición A.2.2. Sea X un subconjunto analítico de U , con $U \subset \mathbb{C}^n$ abierto. Una función $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ se dice que es *holomorfa* en X si para cada $x \in X$ existe un entorno abierto V de x en \mathbb{C}^n tal que $f|_{V \cap X}$ sea la restricción de una función holomorfa en V .

Existe un tipo concreto de conjuntos analíticos en los que la topología local en torno a un punto cualquiera es especialmente sencilla. Veamos cómo definirlos y cuál es esta topología.

Definición A.2.3.

1. Sean f_1, \dots, f_n un conjunto de funciones holomorfas en un abierto $U \subset \mathbb{C}^n$. Sea $p \in U$ y supongamos que $f_1(p) = \dots = f_n(p) = 0$. Entonces, se denomina a $\{f_1, \dots, f_n\}$ conjunto de *funciones coordenadas* en p si cumplen:

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(p) \right) \neq 0.$$

2. Un subespacio $X \subset \mathbb{C}^n$ es una *variedad compleja* de \mathbb{C}^n si para cada $p \in X$ existen un entorno abierto de p , $U_p \subset \mathbb{C}^n$, y un conjunto de funciones coordenadas f_1, \dots, f_n de p de manera que, para algún $m < n$

$$X \cap U_p = \{z \in U_p : f_1(z) = \dots = f_m(z) = 0\}.$$

Con estas definiciones observamos que una variedad compleja como la anterior es un subespacio de \mathbb{C}^n que es localmente como \mathbb{C}^m , es decir, tal que existe un biholomorfismo local entre ambos espacios. En particular, la topología en un entorno de cualquier punto es la de dicho \mathbb{C}^m . Estos espacios son variedades diferenciales, siendo la condición de holomorfía más restrictiva que la diferenciabilidad.

A.3. Gérmenes de espacios analíticos y funciones analíticas

En esta última observación, por primera vez nos hemos acercado al verdadero objetivo de este trabajo: conseguir describir topológicamente las inmediaciones de un punto en un conjunto analítico.

Definición A.3.1. Dado X un espacio topológico y $p \in X$. Se define una relación de equivalencia entre subespacios de X que contengan a p de la siguiente manera: dos de estos, denotados por A y B , están relacionados si y solo si existe un entorno U de p tal que $A \cap U = B \cap U$.

A la clase de equivalencia de un conjunto A en p se le denomina *germen de A en p* , siendo A un representante de dicha clase. Se denota a dicho germen por (A, p) .

En efecto, se comprueba fácilmente que dicha relación es de equivalencia. Además, dados los gérmenes (X, x) , (Y, x) y (Z, x) de un espacio topológico, podemos definir la siguientes relaciones entre ellos.

- En primer lugar, decimos $(X, x) \subset (Y, x)$ si existen representantes X de (X, x) e Y de (Y, x) de modo que $X \subset Y$. Se puede comprobar que se tiene la igualdad entre los gérmenes si se dan los dos contenidos, como es costumbre.
- Si se cumple $(X, x) \subset (Y, x)$ y $(Z, x) \subset (Y, x)$, se define $(X, x) \cap (Z, x)$ como el germen de $X \cap Z$ en x para cada par de representantes X y Z de (X, x) y (Z, x) respectivamente.
- De modo análogo, se define la unión de gérmenes como los anteriores $(X, x) \cup (Z, x)$.

Estas nociones nos interesan aplicadas al caso de los espacios localmente analíticos, es decir, los espacios que localmente vienen dados por los ceros de ciertas funciones holomorfas.

Definición A.3.2. Un *germen de un espacio analítico* (X, p) es un germen en p de un espacio analítico X de \mathbb{C}^n .

Por ejemplo, veamos el caso de una hipersuperficie. Sean $p \in \mathbb{C}^n$ y $f \in \mathcal{O}_{n,p}$, consideremos un entorno abierto U de p en el cual f converja, y con este el subconjunto analítico de U dado por $V(f) := \{z \in U : f(z) = 0\}$. Se define así el *germen de la hipersuperficie analítica* definida por f al germen dado por $(V(f), p)$.

Consideremos un ideal $I = (f_1, \dots, f_s) \subset \mathcal{O}_{n,p}$ generado por las funciones holomorfas indicadas en el paréntesis, se define el germen del espacio analítico dado por los ceros de las funciones del ideal $(V(I), p)$ como

$$(V(I), p) = \bigcap_{i=1}^s (V(f_i), p).$$

Se comprueba fácilmente que esta definición es independiente de la elección de generadores de I .

Además, también podemos razonar a la inversa e identificar el ideal cuyas funciones nos permiten definir un conjunto analítico dado en el sentido anterior. Dado (X, p) un germen de dicho conjunto en p , se define el ideal de las funciones holomorfas que se anulan en él

$$\mathcal{I}(X, p) = \{f \in \mathcal{O}_{n,p} : (X, p) \subset (V(f), p)\}.$$

Nótese que cualquier ideal del anillo $\mathcal{O}_{n,p}$ es finitamente generado, y que el conjunto X es independiente del conjunto de generadores que se escogen para representarlo mediante sus ceros.

Finalmente, el Teorema de los Ceros de Hilbert o *Nullstellensatz* nos asegura que, tomando las notaciones de los párrafos anteriores,

$$\mathcal{I}(V(I), p) = \sqrt{I},$$

es decir, que el ideal de las funciones holomorfas que se anulan en el conjunto analítico dado por los ceros de las funciones en I es precisamente el radical de I .

Finalmente, definamos un tipo concreto e interesante de gérmenes de conjuntos analíticos.

Definición A.3.3. Sea (X, x) el germen de un espacio analítico. Entonces, se dice que es *irreducible* si al expresar $(X, x) = (X_1, x) \cup (X_2, x)$, se tiene que o bien $(X, x) = (X_1, x)$ o bien $(X, x) = (X_2, x)$.

Para cada germen de un espacio analítico se tiene una descomposición única salvo permutaciones del tipo:

$$(X, x) = (X_1, x) \cup \dots \cup (X_r, x)$$

con (X_i, x) gérmenes irreducibles tales que $(X_i, x) \not\subset (X_j, x)$ si $i \neq j$. Estos gérmenes (X_i, x) se denominan *componentes irreducibles* de (X, x) .

Por otro lado, se pueden aplicar la noción de germen a las funciones entre conjuntos.

Definición A.3.4. Sean (X, x) e (Y, y) dos gérmenes de espacios topológicos. Se define el *germen de una función continua* $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ como la clase de equivalencia de funciones $f : U \rightarrow W$ con $f(x) = y$ y donde U y W son representantes de (X, x) e (Y, y) respectivamente. Dos aplicaciones de este tipo $f_1 : U_1 \rightarrow W$ y $f : U_2 \rightarrow W$ se dicen *equivalentes* si coinciden en un entorno abierto de x contenido en $U_1 \cap U_2$.

Sabiendo esto, podemos considerar el caso particular de las funciones por las que nos estamos interesando: las funciones analíticas.

Definición A.3.5. Sea $(X, x) \subset (\mathbb{C}^n, x)$ un germen de un conjunto analítico. Un *germen de una función analítica* $f : (X, x) \rightarrow (\mathbb{C}, y)$ es un germen de una aplicación $f : (X, x) \rightarrow (\mathbb{C}, y)$ que cumple que algún representante suyo es la restricción en X de una función analítica en un entorno abierto de $x \in \mathbb{C}^n$.

Se puede ver que los gérmenes de funciones analíticas sobre (X, x) forman un álgebra sobre \mathbb{C} , denotada por $\mathcal{O}_{X,x}$. Esta álgebra se denomina *anillo de las funciones analíticas* en (X, x) . Se tiene que si $(X, x) \subset (\mathbb{C}^n, x)$ es el germen de un conjunto analítico e $\mathcal{I}(X, x)$ el ideal que hemos definido antes de las funciones que se anulan en X , entonces se puede ver $\mathcal{O}_{X,x}$ como el cociente siguiente:

$$\mathcal{O}_{X,x} = \frac{\mathcal{O}_{n,x}}{\mathcal{I}(X, x)}.$$

Si (X, x) es el germen de una variedad compleja en X (ver definición A.2.3), entonces, se puede demostrar que existe un $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\mathcal{O}_{X,x} \cong \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_k\}$.

A.4. Puntos singulares y puntos críticos

Pasamos a definir uno de los conceptos clave de este trabajo: los puntos singulares de un conjunto analítico. Como comentamos anteriormente, la topología local en torno a un punto de una subvariedad compleja es bien conocida (ver definición A.2.3): es simplemente la de un cierto \mathbb{C}^k contenido en \mathbb{C}^n . Ello motiva la siguiente distinción.

Definición A.4.1.

- Dado $U \in \mathbb{C}^n$ un conjunto abierto y $X \subset U$ un subconjunto analítico. Un punto $p \in X$ se denomina *punto regular o liso* si existe un entorno abierto V de p en \mathbb{C}^n de manera que $X \cap V$ sea una subvariedad compleja, esto es, la imagen vía una aplicación biholomorfa de un abierto de un cierto \mathbb{C}^k .
- Si p no es un punto regular, decimos que es un *punto singular* o singularidad. Al conjunto de puntos singulares de X lo denotaremos por $\text{Sing}(X)$.

Esta definición apela a la existencia de una función biholomorfa que conecte un entorno del conjunto analítico con un abierto de \mathbb{C}^k . Como se puede leer en el capítulo 2 de [11], un conjunto analítico nunca es una variedad diferenciable en un entorno de un punto. Sin embargo, sí podría ser una variedad topológica como en el caso de curvas irreducibles (ver sección 1.4).

Es útil tener una forma más operativa de identificar los puntos singulares de un conjunto analítico. Para los ejemplos con los que trabajaremos aquí, los puntos singulares de los conjuntos analíticos se corresponderán con los puntos críticos de las funciones holomorfas que utilizaremos para definirlos.

Fijemos el concepto de punto crítico de una aplicación entre variedades. Sea una aplicación diferenciable $f : M \rightarrow N$ entre dos variedades diferenciables M y N . La diferencial de f en cada punto $p \in M$ define una aplicación lineal entre los tangentes:

$$d_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N,$$

cuya expresión viene dada por la jacobiana de f evaluada en el punto p . A partir de esta se establecen las siguientes definiciones.

Definición A.4.2.

- Un punto $p \in M$ se denomina *punto crítico* de f si y solo si se cumple:

$$\text{rank}(d_p f) < \min(\dim M, \dim N).$$

Al conjunto de los puntos críticos de f lo denotamos Σ_f .

- Si consideramos una aplicación $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ holomorfa, se tiene que Σ_f constituye un conjunto analítico. Ello se debe a que se puede definir por los ceros de las funciones que definen todos los menores de orden $\min(\dim M, \dim N)$ de la jacobiana.
- Un punto $q \in N$ se denomina *valor crítico* de f si $f^{-1}(q)$ contiene un punto crítico de f . Al conjunto de valores críticos, es decir a $f(\Sigma_f)$, se le denota comúnmente $\text{Crit}(f)$.

Supongamos que tenemos un conjunto analítico X definido por los ceros de un conjunto finito de funciones holomorfas $\{f_1, \dots, f_m\}$, las cuales están definidas de un abierto $U \subset \mathbb{C}^n$ en \mathbb{C} . Tomando $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{C}^m$, por el Teorema de la Función Implícita podemos concluir que si $p \in X$ no es un punto crítico de f , entonces en un entorno de dicho punto X es una subvariedad compleja, y en particular diferenciable, luego dicho punto es regular en el sentido que definíamos antes.

Ahora, para convertir esta implicación en una equivalencia, se debe llevar algo de cuidado. Veámos a qué nos referimos para el caso de una hipersuperficie $X = V(f)$, con $f : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$

una función holomorfa. Queremos identificar los puntos singulares de X con $X \cap \Sigma_f$ para una f como la anterior cuyos ceros definan a X . Nos encontramos con que considerándolos como conjuntos $V(f) = V(f^2)$, luego también podríamos considerar f^2 como la función que define X . Sin embargo, cada punto de $V(f^2)$ es un punto crítico de f^2 , luego en este caso, vemos que el conjunto Σ_{f^2} es “demasiado grande”. Esto sucede así siempre que haya factores repetidos en la posible descomposición en factores primos de f (recordemos que la podemos ver como un elemento de \mathcal{O}_n que es un dominio de factorización única). De esta manera, nos interesan funciones analíticas tales que su descomposición en factores primos $f = f_1^{k_1} \cdot \dots \cdot f_m^{k_m}$, cumpla que $k_i = 1$ para cada $i = 1, \dots, m$. En este caso, decimos que f es *reducida*, y podemos identificar los puntos singulares de $V(f)$ con $V(f) \cap \Sigma_f$.

Para concluir la sección, merece la pena comentar que con estas definiciones, si estamos considerando un espacio analítico en el cual todos sus puntos son lisos tiene sentido hablar del concepto de *dimensión de la variedad compleja*. Por ejemplo, tomando la dimensión topológica, esta se correspondería con la dimensión del \mathbb{C}^k con respecto al cual el espacio es homeomorfo localmente. Además, esta dimensión, como sucede para el caso real, es constante en las componentes conexas del espacio, que se corresponden con las componentes irreducibles que definíamos antes. En el caso general en que X es un conjunto analítico, se puede demostrar que $X - \text{Sing}(X)$ es denso. De este modo, para cada componente irreducible X_i se tiene que $X_i - \text{Sing}(X_i)$ es denso y conexo, luego se puede definir su dimensión correctamente.

Bibliografía

- [1] Arnold, E. , Gusein-Zade, S. M. & Varchenko, A. N. (1988). “*Singularities of Differentiable Maps, Volume 2: Monodromy and Asymptotics of Integrals*”. Birkhäuser.
- [2] Brasselet, J. P., Cisneros-Molina, J. L., Massey, D., Seade, J. & Teissier, B., (2007) “*Singularities II, Geometric and Topological Aspects: International Conference in Honor of the 60th Birthday of Lê Dung Tráng*”, American Mathematical Society.
- [3] Durfee, A. “*Neighborhoods of algebraic sets*”. Trans. Amer. Math. Soc, 276 (1983), 517–530.
- [4] Ehresmann, C. “*Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable.*” Colloque de Topologie, Bruxelles, (1950), 29-55.
- [5] Fernández de Bobadilla, J. *Relative morsification theory*”, Topology 43, n° 4, 925-982 (2004).
- [6] Gunning, R. C. & Rossi, H., (1965). “*Analytic Functions of Several Complex Variables*”. Prentice Hall.
- [7] Hatcher, A. (2001). “*Algebraic Topology*”.
- [8] De Jong, T. & Pfister, G., (2000). “*Local Analytic Geometry: Basic Theory and Applications*”. Vieweg + Teubner Verlag.
- [9] Lê, D. T. & Teissier, B. “*Cycles évanescents et conditions de Whitney*”. In Proc. Symp. Pure Math, 40 (Part 2), (1983), 65–103.
- [10] Matsumoto, Y. (2002). “*An Introduction to Morse Theory*”. American Mathematical Society.
- [11] Milnor, J. (1968). “*Singular Points of Complex Hypersurfaces*”. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- [12] Milnor, J. (1963). “*Morse Theory*”. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- [13] Morse, M. (1934). “*The Calculus of Variations in the Large*”. New York, NY: American Mathematical Society.
- [14] Nicolaescu, L. (2007). “*An Invitation to Morse Theory*”. Springer.
- [15] Seade, J. “*On Milnor’s fibration theorem and its offspring after 50 years*”. Bulletin of the American Mathematical Society. 56. 1. (2018)