

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA



TRABAJO DE FIN DE GRADO

Código de TFG: FT32

Introducción a la física de los Agujeros Negros

Break course on Black Hole Physics

Supervisor: Diego Rubiera-García

**Inés García Redondo**

Grado en Física

Curso académico 2019-20

Convocatoria ordinaria

# Introducción a la física de los Agujeros Negros. Extensión maximal y singularidades de la geometría de Schwarzschild.

## Resumen:

En este trabajo, se pretende entender en profundidad el modelo de agujero negro que describe la geometría de Schwarzschild. El elemento de línea que caracteriza esta geometría fue la primera solución que se encontró para las ecuaciones de Einstein en vacío. Dicha métrica describe la geometría del espacio-tiempo en torno a un objeto masivo estático y con simetría esférica. Veremos que el sistema de coordenadas que escojamos para expresar dicha solución es fundamental para entender correctamente los fenómenos que se describen. Así, a lo largo del trabajo, se irá trabajando con diferentes cambios de coordenadas que nos permitan estudiar la fenomenología que aparece en esta solución. Esto nos servirá para introducir diferentes aspectos relacionados con la naturaleza de los agujeros negros, por ejemplo, la noción de horizonte de eventos, los agujeros de gusano o las singularidades espacio-temporales.

## Abstract:

In this work, we intend to understand the black hole solution described by Schwarzschild's geometry. The line element that characterise that geometry was the first solution found for Einstein's equations in empty space. Its metric tensor describes the space-time geometry around a massive object with spherical symmetry. We will study that the coordinates system in which we express the solution is crucial to properly understand the phenomena that appear. Therefore, in this work we will change the coordinates several times so that we can achieve to describe the physical situations concerning the Schwarzschild's solution. This will allow us to encounter and examine interesting phenomena regarding the black hole's nature, such as the event horizon, wormholes or space-time singularities.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Geometría de Schwarzschild</b>	<b>2</b>
2.1. Métrica de Schwarzschild . . . . .	2
2.2. Caracterización de las coordenadas . . . . .	4
2.3. El agujero negro de Schwarzschild . . . . .	4
2.4. Las singularidades de la métrica de Schwarzschild . . . . .	5
<b>3. Coordenadas de Eddington-Finkelstein</b>	<b>6</b>
3.1. Coordenadas de Eddington-Finkelstein avanzadas . . . . .	7
3.2. Coordenadas de Eddington-Finkelstein retardadas . . . . .	8
<b>4. Coordenadas de Kruskal-Szekeres</b>	<b>9</b>
4.1. Transición desde las coordenadas de Eddington-Finkelstein . . . . .	9
4.2. Relación con las coordenadas de Schwarzschild . . . . .	10
4.3. Dos universos, agujeros blancos y agujeros negros . . . . .	11
4.4. El puente de Einstein-Rosen . . . . .	13
<b>5. Extensiones maximales y singularidades</b>	<b>15</b>
5.1. Algunas intuiciones sobre singularidades espacio-temporales . . . . .	15
5.2. Completitud de caminos para detectar singularidades . . . . .	17
5.3. Extensiones maximales . . . . .	18
<b>6. Conclusiones</b>	<b>19</b>

# 1. Introducción

Los agujeros negros constituyen uno de los fenómenos en los que se pone a prueba de manera directa la teoría de la Relatividad General, y su estudio ha dado lugar al descubrimiento de numerosas predicciones sorprendentes. Durante mucho tiempo, se consideró que estos eran un mero artificio matemático que no tenía cabida en la realidad. Sin embargo, en la década de los 60, con el descubrimiento de objetos compactos fruto del colapso gravitacional como las estrellas de neutrones y púlsares [1], se empezó a contemplar la posibilidad de que estos fueran una realidad física. A día de hoy, como veremos en este trabajo, cada vez parece haber menos dudas de que este fenómeno existe en nuestro Universo, y los misterios que rodean su naturaleza siguen proporcionando nuevas preguntas y retos para la Física.

Nosotros aquí volveremos a los orígenes de la cuestión y estudiaremos la geometría de Schwarzschild, que fue la primera que dio una descripción matemática de una situación que podríamos identificar con la presencia de un agujero negro. Esta solución se obtiene para un modelo muy idealizado, que realmente no se corresponde con la realidad física de los agujeros negros que se han observado. Otras geometrías, que incluyen la posibilidad de que el cuerpo central esté cargado o se encuentre en rotación, se aproximan más a dicha realidad. Sin embargo, en esta solución de Schwarzschild se encuentran reflejados los fenómenos más importantes relacionados con la naturaleza de los agujeros negros: el horizonte de eventos y la singularidad espacio-temporal. La elección de estudiar esta geometría se debe a que su sencillez resulta muy útil a la hora de realizar las disquisiciones teóricas que desarrollaremos en el trabajo y de justificar las intuiciones físicas que emanan de dicha teoría.

Para conseguir todo esto, se estructura este trabajo de la siguiente manera. En la sección 2 se obtiene con detalle la geometría de Schwarzschild, que es la que describe el modelo que nos interesa. Además, se estudian las particularidades del elemento de línea que la caracteriza, cuyos comportamientos singulares se corresponden precisamente con el horizonte de eventos y la singularidad espacio-temporal. Las dos secciones siguientes se orientan a buscar un sistema de coordenadas que consiga describir bien la geometría en las inmediaciones del horizonte de eventos, pues, como veremos, la solución propuesta por Schwarzschild no lo consigue. Se obtienen así las soluciones de Eddington-Finkelstein (en la sección 3) y de Kruskal-Szekeres (en la sección 4). En este último modelo se describe por entero la geometría de Schwarzschild y podremos detallar todos los fenómenos que predice. Finalmente, en la sección 5 se estudia el concepto de singularidad espacio-temporal. Esta cuestión es altamente no-trivial, así que en este trabajo se abordará por medio de una discusión conceptual de los puntos más importantes de la misma relacionados con el estudio de la geometría de Schwarzschild. Revisaremos cuáles son las patologías que nos permiten caracterizar la existencia de una singularidad, para concluir su presencia en el interior del agujero negro de nuestro modelo.

## 2. Geometría de Schwarzschild

En esta primera sección se estudiará la métrica de Schwarzschild, con el objetivo de comprender algunas situaciones que aparecen en la geometría que describe. Como ya hemos comentado, esta constituye la primera solución a las Ecuaciones de Einstein en vacío encontrada históricamente: fue obtenida por Karl Schwarzschild en 1916 [2], tan solo unos meses después de que el propio Einstein publicara estas ecuaciones.

### 2.1. Métrica de Schwarzschild

La métrica de Schwarzschild pretende describir el campo gravitatorio con simetría esférica y estático que se genera en el espacio vacío alrededor de un objeto masivo que también tiene esta simetría.

Atendiendo a esto, para encontrar dicha solución se procede como sigue. Se comienza buscando la forma de una métrica espacialmente isotrópica. Para ello, se impone que esta solo dependa de los invariantes bajo rotaciones que se pueden obtener con las coordenadas espaciales y sus diferenciales:

$$\vec{x} \cdot \vec{x}, \quad d\vec{x} \cdot d\vec{x}, \quad \vec{x} \cdot d\vec{x}.$$

Además, la isotropía también implica que las funciones que actúen como coeficientes de la métrica solo puedan depender del tiempo y la distancia al origen  $r$ . De este modo, el elemento de línea debe tener la forma siguiente:

$$ds^2 = A(t, r)dt^2 - B(t, r)dt\vec{x} \cdot d\vec{x} - C(t, r)(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2 - D(t, r)d\vec{x}^2.$$

Haciendo un cambio a coordenadas esféricas, pasa a tener la siguiente expresión

$$ds^2 = A(t, r)dt^2 - B(t, r)r dt dr - C(t, r)r^2 dr^2 - D(t, r)(dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2).$$

De esta manera, absorbiendo el factor  $r$  en algunas de las funciones anteriores y redefiniendo también la coordenada radial como  $r^2 = D(r, t)$ , se encuentra que la forma más general de una métrica isotrópica debe ser

$$ds^2 = A(t, r)dt^2 - B(t, r)r dt dr - C(t, r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

Ahora, redefiniendo la coordenada temporal se elimina el término cruzado  $dt dr$ . Además, puesto que buscamos que la métrica también sea estática, se elimina la dependencia temporal en las funciones que actúan como coeficientes de la métrica. Con todo, la forma más general de una métrica isotrópica y estática es:

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1)$$

Obsérvese que este elemento de línea queda especificado por dos funciones de la coordenada  $r$ . Además, su restricción a espacios de  $r$  y  $t$  constante es el elemento de línea de una esfera bidimensional, lo que da cuenta de la isotropía que imponíamos. Puesto que en general  $B(r)$  no es necesariamente la función unidad, no podemos interpretar la coordenada  $r$  como la coordenada radial euclídea del espacio tridimensional a la que estamos acostumbrados. Sin embargo, sí se corresponde con el valor que verifica que las esferas bidimensionales anteriores tienen área  $4\pi r^2$ .

Por último, se impone que una métrica como esta sea solución de las ecuaciones de Einstein en vacío. En un espacio-tiempo cuatridimensional esto se reduce a imponer que el tensor de Ricci sea nulo, pues tomando la traza en la ecuación de Einstein en vacío sin constante cosmológica se tiene la siguiente cadena de implicaciones:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \Rightarrow R - 2R = -R = 0 \Rightarrow R_{\mu\nu} = 0.$$

Calculando dicho tensor de Ricci para el elemento de línea (1) nos encontramos con que este es diagonal, e igualando a cero dichas componentes diagonales llegamos a unas ecuaciones diferenciales de segundo orden para  $A(r)$  y  $B(r)$ . Se resuelven estas ecuaciones y se llega a que

$$A(r) = c_1 \left(1 + \frac{c_2}{r}\right), \quad B(r) = \left(1 + \frac{c_2}{r}\right)^{-1},$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes de integración. En el límite de campo débil, se puede demostrar (ver [3]) que, si  $\Phi$  es el potencial gravitatorio newtoniano, se debe cumplir

$$\frac{A(r)}{c^2} \approx 1 + \frac{2\Phi}{c^2}.$$

Además, en este límite, la coordenada  $r$  sí puede aproximarse como la coordenada radial que comentábamos. Para un cuerpo con simetría esférica y masa  $M$ , el potencial gravitatorio es  $\Phi = -GM/r$ , lo que nos permite identificar las constantes de integración. Con todo, se obtiene la expresión:

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2)$$

Que es la conocida como métrica de Schwarzschild. Al sistema de coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$  se le denomina en consecuencia *coordenadas de Schwarzschild*.

## 2.2. Caracterización de las coordenadas

En el presente texto se trabajará constantemente con cambios de coordenadas, pues dado el carácter covariante de las Ecuaciones de Einstein, una métrica que es solución de estas sigue siéndolo tras someterla a un cambio de coordenadas. Una caracterización que siempre se puede establecer sobre una coordenada  $x^\mu$  en un punto  $P$  consiste en determinar si dicha coordenada es de género tiempo, espacio o nulo. Esta clasificación se corresponde de forma natural con el género del vector tangente en el punto  $P$  a la curva coordenada en cuestión. De esta forma, se puede establecer simplemente conociendo el signo del elemento  $g_{\mu\mu}$  (sin suma) de la métrica en  $P$ . Para el convenio de signatura que utilizaremos en este trabajo  $(+ - - -)$ : si es positivo diremos que tiene género temporal; si es negativo, espacial; y si se anula, género luz o nulo. En efecto, la curva coordenada asociada a la coordenada  $\mu$ -ésima se puede parametrizar según:  $x^\nu(s) = \delta_\mu^\nu s$ , luego su vector tangente en cada punto es  $u^\nu = \delta_\mu^\nu$ , cuya norma al cuadrado es simplemente el coeficiente  $g_{\mu\mu}$  que se comentaba.

## 2.3. El agujero negro de Schwarzschild

Rápidamente, observando el elemento de línea (2), se encuentra que no está bien definido en:

$$r = 0 \quad \& \quad r = r_s := \frac{2GM}{c^2},$$

donde este segundo valor es el conocido *radio de Schwarzschild*. Cuando se dice que no está bien definida, esto significa que no permite obtener la 2-forma correspondiente en los espacios tangentes de puntos con dicha coordenada radial, y por tanto, tampoco establecer la geometría del espacio-tiempo allí. Sin embargo, como la métrica es sólo válida en el exterior del cuerpo que genera el campo gravitatorio, estos comportamientos singulares no tienen por qué ser necesariamente problemáticos, pues el radio de Schwarzschild es normalmente mucho menor que el radio del objeto (por ejemplo, en el caso de la Tierra, este es menor a 1 cm.). Para resolver las ecuaciones de Einstein en el interior del cuerpo masivo, se requiere conocer un tensor energía-momento apropiado que describa la distribución de masa esférica y estática. Estas soluciones se denominan de forma natural *soluciones interiores*.

A día de hoy sabemos que hay estrellas muy masivas que, en la última fase de su desarrollo termonuclear, colapsan gravitacionalmente por debajo de su radio de Schwarzschild [4]. Cuando tenemos simetría esférica en este proceso, una vez sucede esto somos incapaces de observar qué

sucede con el objeto masivo [5], y por tanto decimos que se ha originado un *agujero negro*. En este trabajo concreto, se trabajará con el modelo del *agujero negro de Schwarzschild*, que no tiene carga ni momento angular. A partir de ahora, estudiaremos el elemento de línea (2) con la coordenada  $r$  recorriendo todos los posibles valores que pueda tomar:  $r > 0$ , pues esta es la geometría que (debidamente truncada) encontraríamos en el espacio vacío en torno a dicho tipo de agujero negro. Es más: el *teorema de Birkhoff* establece que la solución de Schwarzschild es la única posible para las ecuaciones de Einstein para cualquier distribución esférica de masa (sin necesidad de que sea estática). Así, es importante conocer bien cuáles son los fenómenos que describe la misma.

## 2.4. Las singularidades de la métrica de Schwarzschild

Considerando por tanto el elemento de línea (2) con sus coordenadas definidas en el mayor dominio posible, estudiemos en más detalle los radios problemáticos. Los comportamientos singulares de la métrica pueden deberse o bien a una mala elección de coordenadas, o bien a una verdadera singularidad en la geometría del espacio-tiempo. Una forma de distinguir en cuál de estas situaciones nos encontramos consiste en calcular los escalares de curvatura asociados a la métrica y comprobar si también son singulares en los puntos que nos interesan. En caso de que estos hereden el comportamiento singular, al tratarse de elementos geométricos independientes de coordenadas, no podremos revertir esta situación vía cambios de coordenadas. No obstante, esto no es suficiente para concluir que tenemos una singularidad espacio-temporal, pues su naturaleza es más sutil, y se discutirá en las últimas secciones de este trabajo. Por el contrario, si adquieren valores finitos, sí podremos asociar la singularidad en la métrica a un mal comportamiento de las coordenadas, e intentar solucionar esto buscando otros sistemas que describan bien la geometría en esos puntos.

Para la métrica de Schwarzschild, sabemos que el tensor de Ricci es nulo, pues es lo que imponíamos para hallarla, luego también el escalar de Ricci se anula. Sin embargo, a partir del tensor de Riemann, podemos obtener un escalar de curvatura conocido por *escalar de Kretschmann*:

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{12 r_s^2}{r^6},$$

que toma un valor finito para  $r = r_s$  pero es singular en  $r = 0$ . Ante esto, nos centramos en  $r = r_s$  para intentar ver cómo podríamos solucionar el comportamiento de las coordenadas ahí. Encontramos que suceden dos fenómenos interesantes.

En primer lugar, intentemos ver qué sucedería al cruzar  $r = r_s$ . En la región  $r > r_s$  encontramos que la coordenada  $t$  es de género tiempo mientras que las coordenadas  $r, \theta, \phi$  son de género espacio. De hecho, en esta zona podemos dotar a estas coordenadas de un significado físico razonable: ya comentamos el que tenían  $\theta, \phi$  y  $r$ , mientras que la coordenada  $t$  se corresponde con el tiempo propio de un observador inmóvil en el infinito espacial. Sin embargo, si consideramos la región  $r < r_s$ , los coeficientes  $g_{tt}$  y  $g_{rr}$  cambian de signo, luego  $t$  pasa a tener género espacio y  $r$  género tiempo. Este cambio de género se debe a que  $g_{tt}$  se anula en  $r = r_s$  y  $g_{rr}$  se dispara a infinito al anularse también su denominador.

Veamos en segundo lugar cómo este comportamiento en los coeficientes de la métrica da lugar a problemas con las geodésicas cuando nos aproximamos por la región regular al radio  $r = r_s$ . Estudiemos las geodésicas asociadas a un movimiento radial ( $\theta = cte.$  y  $\phi = cte.$ ) en la región  $r > r_s$ . Con respecto a las *geodésicas nulas*, la condición de la capa de masas nos da una ecuación diferencial en  $t$  y  $r$  que se puede integrar fácilmente. Encontramos así que estas curvas verifican las siguientes ecuaciones:

$$ct = r + r_s \ln \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right| + cte. \quad (\text{fotón saliente}),$$

$$ct = -r - r_s \ln \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right| + cte. \quad (\text{fotón entrante}).$$

Observamos que han heredado el comportamiento singular en  $r = r_s$  de la métrica. De este modo, en un diagrama  $(ct, r)$  encontraremos que las tangentes a la trayectoria de un fotón tienen una pendiente que tiende a infinito conforme nos acercamos a  $r = r_s$ . Esto hace que los conos de luz se hagan más estrechos cuanto más nos acercamos a este radio, de modo que también las trayectorias de partículas masivas acercándose a ese radio deben hacerse cada vez más verticales, sin sobrepasar  $r = r_s$ . Si ahora consideramos un observador en el infinito espacial, encontramos que este ve que la partícula tarda un tiempo infinito en alcanzar  $r = r_s$ . Ello se debe a que las direcciones iniciales de los fotones que emite una partícula acercándose a dicho radio son cada vez más verticales, luego cada vez tardan más en llegar a dicho observador. Veamos ahora cómo es este trayecto desde el punto de vista de la partícula, es decir, estudiemos las *geodésicas temporales*. Si consideramos una partícula que parte del reposo desde un radio finito  $r_0 > r_s$ , se encuentra que la ecuación radial de su trayectoria respecto al tiempo propio  $\tau$  debe cumplir:

$$\tau = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{r_0^3}{r_s c^2}} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{r^3}{r_s c^2}},$$

donde se toma la constante de integración de manera que  $r(\tau = 0) = r_0$  y se considera la trayectoria entrante. De este modo tenemos que la partícula tardaría un tiempo propio finito en llegar a  $r = r_s$  y a  $r = 0$ . Esto parece contradecir el resultado que acabamos de obtener, por el cual un observador en el infinito nunca llegaba a ver la partícula cruzar el radio  $r = r_s$ . Ante esto, lo que debe suceder es que la partícula sí consigue cruzar este radio, pero la coordenada  $t$  no es capaz de predecir bien este comportamiento. Esto se debe a que dicha coordenada describe el tiempo propio de un observador asintótico, lo cual difiere enormemente de lo que ve un observador en caída libre hacia el radio de Schwarzschild. Además, también podemos obtener una ecuación como la anterior que relacione  $t$  y  $r$  en estas trayectorias. En ella se predice que se requiere un tiempo infinito para alcanzar  $r = r_s$  pero también, que en la región  $r < r_s$  el tiempo resulta decreciente conforme nos acercamos a  $r = 0$ .

Estas observaciones nos dan pistas sobre cómo fallan las coordenadas al describir la geometría conforme nos acercamos a  $r = r_s$ . Para poner fin a estos problemas, buscaremos entonces que en las nuevas coordenadas los coeficientes de la métrica no se anulen ni tengan comportamientos singulares.

### 3. Coordenadas de Eddington-Finkelstein

En primer lugar estudiaremos un cambio de coordenadas que, si bien no logra resolver todos los problemas expuestos sobre las geodésicas, sirve para ilustrar el procedimiento que se seguirá a la hora de buscar el cambio que sí lo haga. Como acabamos de ver, las geodésicas de fotones y partículas masivas que se mueven radialmente parecen “cruzar” el radio  $r = r_s$  en  $t = \pm\infty$ . Ante esto, parece razonable intentar cambiar el tiempo por otra coordenada cuyo valor tengamos controlado en las geodésicas, por ejemplo, buscándola de modo que resulte constante en ellas. En este caso, utilizaremos para sondear el espacio-tiempo trayectorias de fotones moviéndose radialmente. Roger Penrose fue la primera persona en hacer explícitamente los cambios de coordenadas que exponemos en esta sección [5], aunque atribuyó el mérito de la idea a Arthur S. Eddington [6] y David Finkelstein [7], de ahí el nombre de las coordenadas.

### 3.1. Coordenadas de Eddington-Finkelstein avanzadas

Teníamos que la geodésica de un fotón entrante moviéndose radialmente estaba dada por:

$$ct = -r - r_s \ln \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right| + cte.$$

Atendiendo a la discusión anterior, tomamos la constante de integración como una nueva coordenada:

$$p = ct + r + r_s \ln \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right|, \quad (3)$$

que por motivos históricos se denomina *parámetro de tiempo avanzado*. Cambiando la coordenada  $t$  por esta, encontramos que la métrica pasa a tener la siguiente forma:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dp^2 - 2dpdr - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4)$$

Parémonos un momento a analizar el cambio de coordenadas efectuado. Podría resultarnos extraño puesto que no es un difeomorfismo en  $r = r_s$ , luego no es un cambio de coordenadas válido para ese radio. Sin embargo, nos basta con que lo sea en la región regular para la métrica de Schwarzschild en las coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$ . Con este cambio, conseguimos una métrica regular en  $0 < r < +\infty$  a partir de otra válida en  $r_s < r < +\infty$ , de manera que ambas representan el mismo espacio-tiempo en esta segunda región. Así, hemos obtenido a una nueva variedad semi-riemanniana que contiene la región no singular de la geometría de Schwarzschild como subespacio propio. En esta situación decimos que hemos encontrado una *extensión* de la métrica.

Veamos con detalle qué hemos conseguido solucionar. En este nuevo sistema de coordenadas  $r$  resulta una coordenada nula, al igual que  $p$  en  $r = r_s$ , donde cambia de género, de temporal a espacial. De este modo tenemos un elemento de línea sin comportamientos singulares en  $0 < r < +\infty$ , pero con un coeficiente que se anula para  $r = r_s$ . Este hecho va a dar lugar a un comportamiento singular en las geodésicas de fotones radiales salientes, que son las que no hemos examinado. En efecto, de la condición de la capa de masas si  $\theta$  y  $\phi$  se toman constantes, se tiene que las geodésicas nulas deben cumplir:

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(\frac{dp}{dr}\right)^2 - 2\frac{dp}{dr} = 0,$$

lo que da lugar a dos posibles soluciones:

$$\frac{dp}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = cte., \quad \text{fotón entrante,}$$

$$\frac{dp}{dr} = 2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \quad \Rightarrow \quad p = 2r + 2r_s \ln \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right| + cte., \quad \text{fotón saliente.}$$

Y así, observamos que la segunda solución sigue disparándose a infinito cuando  $r = r_s$ .

Al margen de esto, se suele completar este procedimiento definiendo una coordenada temporal (para evitar tener una coordenada nula, que es menos intuitiva a nivel físico) dada por:

$$ct' = p - r = ct + r_s \ln \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right|. \quad (5)$$

Con lo que el elemento de línea adquiere la forma:

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt'^2 - \frac{2r_s c}{r} dt' dr - \left(1 + \frac{r_s}{r}\right) dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (6)$$

Estas coordenadas  $(t', r, \theta, \phi)$  se denominan *coordenadas avanzadas de Eddington-Finkelstein*. Podemos preguntarnos por la estructura de los conos de luz de su diagrama  $(ct', r)$ . Las ecuaciones para fotones entrantes y salientes que se mueven radialmente en estas nuevas coordenadas se pueden obtener fácilmente de la condición de capa de masas y son:

$$ct' = -r + cte., \quad \text{fotón entrante,}$$

$$ct' = r + 2r_s \ln \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right| + cte., \quad \text{fotón saliente.}$$

Ante esto, encontramos que las trayectorias de los fotones entrantes son simplemente rectas que cruzan la recta  $r = r_s$  por donde deban. Por su lado, las de los fotones salientes siguen disparándose a  $t' = -\infty$  cuando  $r = r_s$ . Con este diagrama, se predice que una partícula o fotón que cae hacia  $r = 0$  puede cruzar sin problema el punto  $r = r_s$ . Sin embargo, en este radio, la estructura de los conos de luz cambia, de modo que el futuro siempre está orientado hacia la singularidad  $r = 0$ . Una partícula o fotón que se mueva radialmente empezando con  $r < r_s$  no podrá escapar jamás a la región  $r > r_s$  sin violar causalidad. Además, si observamos las ecuaciones para las geodésicas nulas salientes, si una partícula emitiera fotones desde la región  $r < r_s$ , estos nunca alcanzarían a un observador en  $r > r_s$ . De este modo, se hace intuitivo el nombre *agujero negro*, el cual se define de manera más formal como un objeto compacto que tiene un *horizonte de sucesos*, es decir, una superficie con las características de la dada por  $r = r_s$ .

### 3.2. Coordenadas de Eddington-Finkelstein retardadas

En realidad, la elección de las geodésicas de fotones entrantes ha sido arbitraria, y se podría repetir todo el proceso expuesto anteriormente considerando las de fotones salientes. Sin reparar tanto en los detalles, se definiría un *parámetro de tiempo retardado* dado por

$$q = ct - r - r_s \ln \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right|, \quad (7)$$

y a partir de este una nueva coordenada temporal definida como

$$ct^* = q + r = ct - r_s \ln \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right|. \quad (8)$$

De este modo en las coordenadas  $(t^*, r, \theta, \phi)$ , denominadas *coordenadas de Eddington-Finkelstein retardadas*, el elemento de línea de Schwarzschild sería simplemente la inversión temporal del que se obtenía con las coordenadas avanzadas. Trazando un diagrama  $(ct^*, r)$  y estudiando la estructura de conos de luz, encontramos algunos cambios interesantes respecto a la situación previa. En este caso, las trayectorias de fotones salientes son rectas que cruzan sin problema el radio  $r = r_s$ . De hecho, por cómo se configuran los conos de luz, cualquier partícula (o fotón) en la región  $r < r_s$  debe salir de la misma, alejándose siempre de  $r = 0$ . Este fenómeno físico se denomina *agujero blanco*, y resulta algo extraño con respecto a la intuición física que tenemos de la fuerza gravitatoria, que siempre resulta atractiva con respecto a un cuerpo masivo. Más adelante estudiaremos qué significa la predicción de este fenómeno, contrario al obtenido con las coordenadas avanzadas. Además, realizando un desarrollo análogo al caso anterior, se obtiene que con este cambio de coordenadas las trayectorias de fotones entrantes siguen teniendo comportamientos singulares en  $r = r_s$ , y también se mantiene el cambio de género en la coordenada temporal.

## 4. Coordenadas de Kruskal-Szekeres

Hemos visto cómo con las coordenadas de Eddington-Finkelstein, si tomábamos una coordenada basada en las geodésicas entrantes (respectivamente salientes) de fotones moviéndose radialmente, conseguíamos resolver los problemas relacionados con dicho grupo de geodésicas, manteniéndose los problemas asociados a las salientes (respectivamente entrantes). Por tanto, es natural que el próximo sistema de coordenadas que estudiemos introduzca dos coordenadas nuevas en lugar de una, una basada en las geodésicas salientes, y otra en las entrantes. Esta fue la idea que tuvieron simultáneamente Kruskal [8] y Szekeres [9] en 1960, y que exponemos en esta sección.

### 4.1. Transición desde las coordenadas de Eddington-Finkelstein

Aprovechando el trabajo de la sección anterior, una primera apuesta razonable sería introducir simultáneamente los parámetros de tiempo avanzado y retardado. La métrica de Schwarzschild quedaría de la forma:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dp dq - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (9)$$

donde  $r$  es una función de  $p$  y  $q$ , definida de forma implícita por

$$\frac{1}{2}(p - q) = r + r_s \ln \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right|.$$

En este sistema de coordenadas,  $p$  y  $q$  son coordenadas nulas, pero seguimos teniendo un coeficiente en la métrica que se anula en  $r = r_s$ . Sin embargo, lo que hemos ganado es que precisamente este se encuentra en un término cruzado de coordenadas nulas, luego ahora podemos intentar redefinir estas coordenadas para hacerlo desaparecer, cosa que no podíamos conseguir en las coordenadas de Eddington-Finkelstein. Observando la función implícita que define la coordenada  $r$ , tenemos que se cumple

$$\exp\left(\frac{p - q}{2r_s}\right) = \exp\left(\frac{r}{r_s}\right) \left(\frac{r}{r_s} - 1\right),$$

lo que nos sugiere tomar un cambio de coordenadas como el siguiente:

$$\bar{p} = \exp\left(\frac{p}{2r_s}\right), \quad \bar{q} = -\exp\left(-\frac{q}{2r_s}\right), \quad (10)$$

para el cual se obtiene un elemento de línea dado por

$$ds^2 = \frac{4 r_s^3}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_s}\right) d\bar{p} d\bar{q} - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

En él, de nuevo, el valor de  $r$  viene determinado por la función implícita

$$\bar{p}\bar{q} = -\exp\left(\frac{r}{r_s}\right) \left(\frac{r}{r_s} - 1\right).$$

En estas nuevas coordenadas hemos conseguido no tener ningún coeficiente con comportamiento problemático. Sin embargo, con intención de tener una mayor intuición física sobre el significado de las coordenadas, hacemos un último cambio, definiendo las coordenadas temporal  $v$  y espacial  $u$  dadas por

$$v = \frac{1}{2}(\bar{p} + \bar{q}), \quad u = \frac{1}{2}(\bar{p} - \bar{q}). \quad (11)$$

Con todo, el elemento de línea en las *coordenadas de Kruskal-Szekeres*  $(v, u, \theta, \phi)$  queda:

$$ds^2 = \frac{4 r_s^3}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_s}\right) (dv^2 - du^2) - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (12)$$

Y el valor de  $r$  a partir de estas últimas coordenadas se obtiene de la ecuación implícita

$$u^2 - v^2 = \left(\frac{r}{r_s} - 1\right) \exp\left(\frac{r}{r_s}\right). \quad (13)$$

Para concluir, prestemos algo de atención al elemento de línea (12). Si restringimos este a espacios con  $\theta$  y  $\phi$  constantes, obtenemos una métrica de dos dimensiones conforme a la métrica de Minkowski. Esto cobrará relevancia cuando estudiemos la estructura de los conos de luz en estas coordenadas.

## 4.2. Relación con las coordenadas de Schwarzschild

Intentemos recuperar información sobre la geometría que describe el elemento de línea en las coordenadas de Kruskal-Szekeres. Para ello, expresemos las coordenadas  $u$  y  $v$  en función de las coordenadas de Schwarzschild  $t$  y  $r$ . Haciendo las cuentas del cambio de coordenadas de la métrica, encontramos que las siguientes relaciones nos permiten transformar el elemento de línea de Kruskal-Skeres en el de Schwarzschild. Se distingue entre  $r > r_s$ , donde se tiene

$$\begin{aligned} v &= \exp\left(\frac{r}{2r_s}\right) \sqrt{\frac{r}{r_s} - 1} \sinh\left(\frac{ct}{2r_s}\right), \\ u &= \exp\left(\frac{r}{2r_s}\right) \sqrt{\frac{r}{r_s} - 1} \cosh\left(\frac{ct}{2r_s}\right), \end{aligned} \quad (14)$$

y  $r < r_s$ , donde se encuentra

$$\begin{aligned} v &= \exp\left(\frac{r}{2r_s}\right) \sqrt{1 - \frac{r}{r_s}} \cosh\left(\frac{ct}{2r_s}\right), \\ u &= \exp\left(\frac{r}{2r_s}\right) \sqrt{1 - \frac{r}{r_s}} \sinh\left(\frac{ct}{2r_s}\right). \end{aligned} \quad (15)$$

Además, por la ecuación (13), que debe verificarse entre las coordenadas  $u$  y  $v$  de Kruskal-Szekeres y la coordenada  $r$  de Schwarzschild, encontramos que la primera relación (14) es válida en el cuadrante dado por  $u > |v|$ , mientras que la relación (15) es válida en el dado por  $v > |u|$ . Llamaremos al primero cuadrante I y al segundo, cuadrante II. En los cuadrantes simétricos a estos, que denominaremos cuadrantes I' y II' respectivamente, se pueden establecer las mismas relaciones pero con un signo negativo en ambas. Ante esto, lo primero que observamos es que la variedad que describen las coordenadas de Kruskal-Szekeres contiene dos espacio-tiempos de Schwarzschild. Esto no solo se ve a través de los cambios de coordenadas que acabamos de exponer, sino que en esta sección encontraremos que los fenómenos descritos por la geometría de Schwarzschild se desdoblán en las coordenadas de Kruskal-Szekeres. Por ejemplo, ya podemos ver cómo aparecen dos regiones “exteriores”, es decir, asociadas a  $r > r_s$ ; y dos regiones “interiores”, asociadas a  $r < r_s$  de la geometría de Schwarzschild. De este modo, las coordenadas de Schwarzschild constituyen un sistema de coordenadas local de una parte del espacio-tiempo de Kruskal-Szekeres.

Dicho esto, pasemos a estudiar cómo sería el diagrama espacio-temporal en las coordenadas de Kruskal-Szekeres. En primer lugar, observamos que las trayectorias nulas radiales ( $ds^2 = d\theta = d\phi = 0$ ) responden a la ecuación

$$v = \pm u + cte.,$$

es decir, son rectas que forman  $\pm 45^\circ$  con los ejes. Esto es una manifestación de que la restricción de la métrica (12) a subespacios con  $\theta = cte.$  y  $\phi = cte.$  es conforme a la métrica de Minkowski. De este modo, sus conos de luz son como los de la relatividad especial, lo cual facilita mucho la tarea de entender las relaciones causales entre sucesos en el diagrama. Las geodésicas que “apuntan hacia arriba”, es decir, cuya tangente forma un ángulo menor a  $45^\circ$  con el eje  $v$  son de tipo temporal, mientras que las que apuntan “hacia fuera” son de tipo espacial.

Pasemos ahora a estudiar qué forma adquieren en este diagrama los hiperplanos con  $r$  constante del espacio-tiempo de Schwarzschild. Atendiendo a la ecuación (13), si  $r$  es constante entonces también resulta constante  $u^2 - v^2$ , luego estos espacios toman la forma de hipérbolas en el diagrama  $(v, u)$ . En particular, contemplemos lo que sucede con los radios problemáticos que estábamos estudiando. Por un lado, el radio  $r = r_s$  da lugar a las rectas  $v = \pm u$ , las cuales son las asíntotas del conjunto de hipérbolas que representan los espacios de  $r$  constante y también suponen el límite entre las cuatro regiones que distinguíamos anteriormente. Por su lado, y quizá más interesante, la singularidad en el punto  $r = 0$  se desdobra ahora en las hipérbolas  $v = \pm\sqrt{u^2 + 1}$ . Observamos que estas curvas verifican

$$\left| \frac{dv}{du} \right| = \left| \frac{u}{\sqrt{u^2 + 1}} \right| < 1,$$

luego son de género espacial, situándose una en la región pasada II' y otra en la futura II. Obsérvese la enorme diferencia con respecto a la situación anterior: en el diagrama  $(ct, r)$  de las coordenadas de Schwarzschild esta singularidad quedaba representada por una recta de género temporal que marcaba el origen de coordenadas.

Finalmente, veamos qué forma adquieren en este diagrama los espacios con  $t$  constante. A partir de las relaciones del principio de esta sección, se puede ver que

$$\tanh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) = \begin{cases} v/u & \text{si } r > r_s, \\ u/v & \text{si } r < r_s, \end{cases} \quad (16)$$

luego establecer  $t = cte.$  se corresponde en las coordenadas de Kruskal-Szekeres con rectas de  $v/u = cte.$  que pasan por el origen. La recta que se corresponde con  $t = -\infty$  es  $u = -v$ , mientras que la que se corresponde con  $t = +\infty$  es  $u = v$ . Ambas coinciden con las rectas que marcaban  $r = r_s$ .

### 4.3. Dos universos, agujeros blancos y agujeros negros

Habiendo hecho la discusión previa, podemos pasar a estudiar cómo se relacionan las regiones del diagrama y qué representan. Gráficamente, la situación se recoge en la figura 1. Por la estructura de los conos de luz, las regiones I' y II' son inaccesibles desde I y II. Además, como ya hemos mencionado, I y I' se corresponden con regiones exteriores al radio de Schwarzschild en la geometría del espacio-tiempo. Estas constituyen dos universos asintóticamente planos diferentes, que en principio, solo parecen poder conectarse en el origen del diagrama  $(u, v)$ , en el que encontramos un fenómeno que estudiaremos en la sección siguiente. Por su lado, las regiones II y II' se corresponden con la zona interior al horizonte de eventos. Sin embargo, estas regiones interiores predicen comportamientos físicos opuestos entre sí: cualquier partícula o fotón en la región II' escapa de esta hacia las regiones I y I', mientras que cualquier partícula o fotón que acceda a la región II debe

acabar su trayectoria en la singularidad futura. Así, la primera se corresponde con el fenómeno que denominábamos agujero blanco, mientras que la segunda es el ya familiar agujero negro.

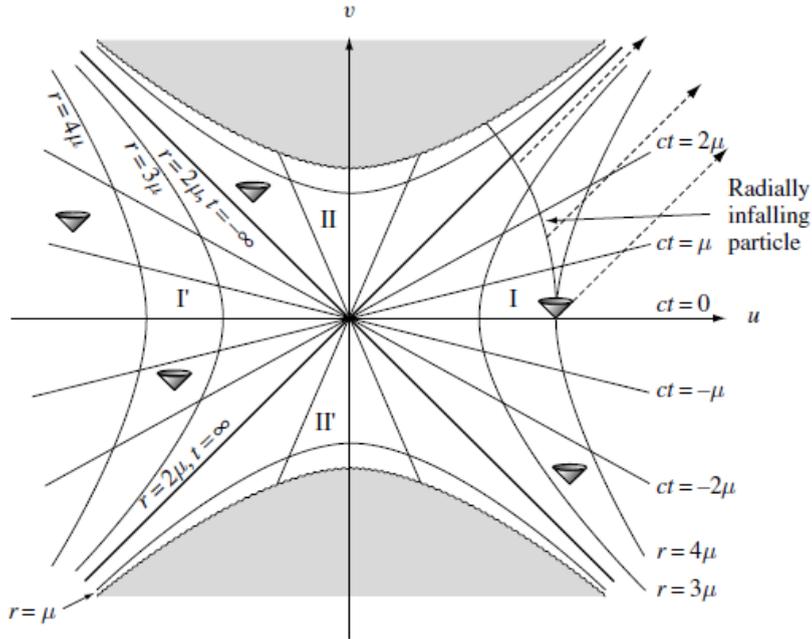


Figura 1: Diagrama espacio-temporal en coordenadas de Kruskal-Szekeres. Se reflejan las cuatro regiones características, las hipérbolas correspondientes a trayectorias con  $r = cte.$ , las rectas asociadas a trayectorias con  $t = cte.$  y la trayectoria de una partícula que se mueve radialmente cayendo a la singularidad futura. Por último,  $\mu$  es un parámetro tal que  $r_s = 2\mu$ . Extraída de [3].

Obsérvese que hemos conseguido obtener es una mayor intuición física sobre lo que puede representar este agujero blanco. Decíamos en la sección anterior que este fenómeno predicho por la Relatividad General podía parecerse extraño por las intuiciones físicas que tenemos sobre cómo actúa la gravedad. Sin embargo, el diagrama de Kruskal-Szekeres revela que no podemos “caer” en un agujero blanco: un agujero blanco solamente puede existir en el pasado, luego no hay incongruencia con nuestra intuición en este sentido. Aun así, el hecho de que la geometría de Schwarzschild conlleve la existencia de dos universos distintos ha perturbado a investigadores y teóricos, llevando a nuevas propuestas sobre cómo interpretar el agujero blanco. Exploraremos algunas interpretaciones de dicho fenómeno en la sección siguiente.

Finalmente, ¿existen realmente estos fenómenos que describimos? Actualmente, tenemos evidencias suficientes que apoyan la existencia de agujeros negros. Por ejemplo, a través de las observaciones de emisiones de rayos X en sistemas binarios donde el objeto compacto mayor es un agujero negro [10], el famoso experimento que confirmó la existencia de ondas gravitacionales gracias a un fenómeno de colisión de dos agujeros negros de masa estelar [11], o el también conocido experimento que permitió obtener una imagen de la fotosfera del agujero negro en el centro de la galaxia M87 [12], entre muchos otros. Sin embargo, no podemos decir lo mismo de los agujeros blancos. Como ya hemos indicado, se ha concluido que los agujeros negros pueden aparecer al producirse el colapso gravitacional de objetos muy masivos, pero no se conoce un proceso de formación tan claro para el caso de los agujeros blancos. En cuanto a la detección de fenómenos compatibles con sus características, se ha propuesto asociar ciertas observaciones de explosiones de rayos gamma [13] como la detección GRB 060614 de la NASA, a la expulsión de materia que conlleva un agujero

blanco. Sin embargo, esta interpretación no termina de ser concluyente para afirmar que se trata en efecto de agujeros blancos.

#### 4.4. El puente de Einstein-Rosen

En la discusión sobre cómo es la geometría descrita por las coordenadas de Kruskal-Szekeres, encontrábamos que se predecían dos universos asintóticamente planos diferentes, cuyo único punto de contacto se tiene en el origen del diagrama  $(v, u)$ . En esta sección, el objetivo consiste en describir un fenómeno interesante que predice la geometría de Schwarzschild con respecto a la relación entre dichos universos. Para ello, comenzaremos estudiando la geometría de la hipersuperficie espacial  $v = 0$ , que se extiende desde  $u = -\infty$  hasta  $u = +\infty$ , y que a su vez se corresponde con un espacio en el que  $t = 0$  (basta con ver las relaciones de la sección 4.2). Recordemos que en el diagrama  $(v, u)$  cada punto en realidad representa una 2-esfera, pues los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  se han suprimido del mismo. Tomando además la restricción al plano ecuatorial de dicha esfera, es decir  $\theta = \pi/2$ , el elemento de línea adquiere la forma:

$$ds^2 = -\frac{4r_s^3}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_s}\right) du^2 - r^2 d\phi^2. \quad (17)$$

Podemos reinterpretar esta métrica (cambiándola de signo) como la de una variedad sumergida en un espacio euclídeo, lo cual nos permite obtener información geométrica sobre qué representa. Observemos, antes de nada, que al movernos sobre la hipersuperficie  $v = 0$  desde  $u = -\infty$  a  $u = +\infty$  el valor de  $r$  decrece hasta un valor mínimo  $r = r_s$  y luego vuelve a aumentar su valor. Dicho esto, pasemos a ver cómo sería el espacio descrito por una métrica como la opuesta de (17). Para ello, la expresamos en función de las coordenadas  $r$  y  $\phi$ , obteniendo

$$d\sigma^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (18)$$

Ahora, suponemos conocido un sistema de coordenadas de la variedad vista en  $\mathbb{R}^3$  dado por  $x^i(r, \phi)$ , con  $i = 1, 2, 3$ , de manera que las coordenadas  $x^i$  se pueden ver como coordenadas del espacio euclídeo tridimensional en cuestión. Por la simetría axial que presenta el elemento de línea (17) es útil considerar que dichas coordenadas son en nuestro caso las coordenadas cilíndricas:  $(\rho, \varphi, z)$ . En estas coordenadas, el elemento de línea del espacio euclídeo plano tiene la forma

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2.$$

Además, dada dicha simetría, también podemos tomar el sistema de coordenadas de la superficie que queremos describir de la forma

$$\rho = \rho(r), \quad \varphi = \phi, \quad z = z(r).$$

De esta manera, restringiendo la métrica del espacio euclídeo a nuestra superficie, tenemos que esta debe cumplir

$$d\sigma^2 = \left[ \left(\frac{d\rho}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 \right] dr^2 + \rho^2 d\phi^2,$$

y que asimismo debe ser igual a (18). Ante esto, obtenemos que  $\rho = r$  y que

$$\left(\frac{d\rho}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}.$$

La solución de dicha ecuación nos da la ecuación implícita

$$z(r) = \sqrt{4r_s(r - r_s)} + cte.$$

que describe una superficie en un espacio tridimensional representada en la figura 2. Obsérvese que se ha suprimido un grado de libertad al establecer  $\theta = \pi/2$ , luego realmente cada circunferencia de radio  $r$  en dicha figura representa una esfera de superficie  $4\pi r^2$ . De este modo, la situación física que se obtiene consiste en dos universos asintóticamente planos idénticos pero diferentes que se unen a través de un *punte de Eintein-Rosen* con radio  $r = r_s$ . Esta situación fue descrita por primera vez en [14]. Aunque las ecuaciones de Einstein fijan la geometría local del espacio-tiempo, no permiten obtener información sobre la topología del mismo, luego otra posible interpretación de lo que se obtiene para el espacio  $v = 0$  es un puente de Einstein-Rosen que conecta dos regiones asintóticamente planas lejanas entre sí de un mismo Universo.

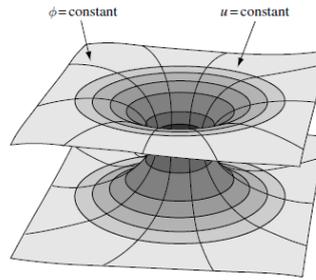


Figura 2: La estructura del puente de Einstein-Rosen, extraída de [3]

En cualquiera de los casos anteriores, una de las características de este puente es que es dinámico. Decíamos al principio de este texto que la geometría de Schwarzschild se buscaba de modo que fuera estática. Si observamos esto con más cuidado, encontramos que es cierto tan solo en la región externa al horizonte de eventos, donde  $t$  es la coordenada temporal, y en efecto el elemento de línea no depende de dicha coordenada y es invariante bajo su inversión. Sin embargo, en la región interior las coordenadas  $r$  y  $t$  cambian sus papeles, de manera que el espacio-tiempo en esta zona deja de ser estático y evoluciona con la nueva coordenada temporal. Así, volviendo a nuestra hipersuperficie  $v = 0$  en las coordenadas de Kruskal-Szekeres, se observa que a medida que pasa el tiempo, parte de este espacio entra en la región II y comienza a cambiar. La forma de la hipersuperficie conforme se adentra en esta región II es cualitativamente la misma que la descrita en la figura 2, aunque la “garganta” del puente se estrecha. Al llegar a  $v = 1$  el puente se ha estrechado tanto que ambos universos están únicamente en contacto a través de sus singularidades en  $r = 0$ , e inmediatamente después se desconectan, cada uno manteniendo una singularidad. Como la solución de Kruskal-Szekeres es simétrica en  $v$  encontramos el mismo comportamiento para valores negativos de esta coordenada.

Así, poniendo todo en conjunto, se tiene la siguiente situación: se comienza con dos universos asintóticamente planos desconectados, cada uno con una singularidad en  $r = 0$ . Conforme pasa el tiempo, ambos se juntan por dichas singularidades y se forma un puente de Einstein-Rosen no singular que los conecta. Este puente se hace cada vez más amplio hasta alcanzar su máximo radio  $r = r_s$  y luego se estrecha hasta desaparecer, retornando a la situación de partida. Así, como preveníamos, este puente nos permite reinterpretar la naturaleza del agujero blanco, pues identifica las singularidades pasada y futura. De este modo, nos podría permitir extender las geodésicas (veremos qué significa esto con más cuidado en la próxima sección), es decir: suponer que la trayectoria de una partícula que cayera en la singularidad de la región II, emergería de la singularidad pasada

y sería expulsada a la región II'. Sin embargo, hay serias objeciones a que esto pueda realizarse, y aún en caso de que pudiéramos suponerlo, puede resultar que físicamente no tenga cabida que un observador atravesase la singularidad. El primer problema que aparece en este sentido es que no hay un mecanismo de formación físico claro para esta estructura. Además, en caso de que lo hubiera, el proceso de formación y destrucción de la garganta es demasiado rápido para que se pueda cruzar. Por otro lado, la singularidad en  $r = 0$  constituye una región del espacio en la cual la curvatura, como ya hemos visto, se hace infinita. Ello sugiere que las fuerzas de marea también se hacen infinitas en este punto, aunque poder concluir esto requiere un desarrollo matemático sutil. Estas fuerzas de marea infinitas destruirían cualquier cuerpo con extensión que pasara por allí. Adicionalmente, lo que sí podemos asegurar es que las ecuaciones de Einstein pierden su validez en esta zona, luego cualquier hipótesis que se realice sobre qué ocurre ahí no tendrá respaldo físico: simplemente constituye una hipótesis matemática realizada *ad hoc*. Finalmente, existen una serie de cuestiones concernientes a las condiciones de energía que se deben cumplir que imposibilitan que se pueda cruzar esta garganta. Algunos de los problemas que acabamos de exponer se pueden solucionar en otros tipos de estructuras: los agujeros de gusano (ver [15]) que tienen geodésicas definidas para todo tiempo en ambos universos de la solución. Sin embargo, este asunto escapa del objeto de este texto, por lo que no ahondaremos más en él

## 5. Extensiones maximales y singularidades

Todos los cambios de coordenadas que se han ido realizando hasta ahora han ido encaminados a “solucionar” los problemas de la métrica. Para ello, hemos buscado espacio-tiempos con elementos de línea regulares que contuvieran las regiones no singulares de las variedades con elementos de línea mal definidos como subespacios propios. Al llegar al sistema de coordenadas de Kruskal-Szekeres, hemos dado por concluido este proceso, pero no hemos reflexionado sobre por qué esta solución es la mejor a la que podemos aspirar. La realidad es que esta cuestión está íntimamente relacionada con la naturaleza de las singularidades intrínsecas de la geometría espacio-temporal, como la que no hemos conseguido sortear en la métrica de Schwarzschild para  $r = 0$ . El propósito de esta sección será abordar esta cuestión y dar una base teórica sobre cómo podríamos caracterizar estas singularidades para finalmente definir el concepto de *extensión maximal*, que es precisamente lo que representa la solución de Kruskal-Szekeres.

### 5.1. Algunas intuiciones sobre singularidades espacio-temporales

En el proceso de intentar dar con una caracterización de lo que es una singularidad espacio-temporal se ha llegado a múltiples definiciones, para las que luego se han encontrado contraejemplos [16]. Así, el propósito de las dos próximas secciones será seguir la estela de dichos intentos para terminar con el criterio más aceptado para detectar singularidades del espacio-tiempo, y entender sus posibles problemas. Sin embargo, no se desarrollará hasta las últimas consecuencias el aparatado matemático involucrado en la versión más general de esta definición, pues requiere un esfuerzo que escapa del objetivo de este texto. Para nuestro ejemplo de la métrica de Schwarzschild, basta con quedarnos con un caso menos general que podemos manejar mejor.

Antes de todo esto, una reflexión sobre de dónde vienen algunos problemas conceptuales asociados a la definición de singularidad. Principalmente, estos residen en querer asociar la singularidad a “algo” situado en un lugar del espacio-tiempo, como se hace en otras teorías clásicas de campos. En efecto, en ellas tenemos un espacio-tiempo de Minkowski bien definido y lo que se busca es cuándo una cierta magnitud tensorial no está bien definida o se dispara a infinito en un cierto evento de dicho espacio-tiempo. Sin embargo, aquí la situación es completamente diferente: estamos estudiando la

propia variedad y la estructura de la métrica que da lugar al espacio-tiempo. Si estos no están definidos, no podremos hablar de eventos, de tiempos ni lugares. Por ejemplo, en el caso de la métrica de Schwarzschild, si sólo podemos definir la variedad para  $r > 0$ , no podemos referirnos al punto  $r = 0$  como un lugar, pues no es parte de la solución ya que las Ecuaciones de Einstein no se verifican en ese punto. De esta manera, notemos que cuando hablamos de singularidades en realidad nos estamos refiriendo a espacio-tiempos singulares, y es esta noción la que pretendemos caracterizar.

Ante esta idea de que las singularidades, de algún modo, no están presentes en el espacio-tiempo, uno de los primeros intentos para tratarlas consistió precisamente en buscar incluirlas en la variedad definiéndolas como un borde de la misma o redefiniendo la topología del espacio si fuera necesario [17]. Esto puede parecer sencillo e incluso llevarse a cabo de forma exitosa para algunos ejemplos concretos, sin embargo, al intentar generalizar esta noción se ha llegado a severos problemas. No abordaremos esta cuestión aquí, si bien merece la pena mencionarla para completar el comentario precedente.

No pudiendo hacer lo anterior, nos encontramos con que queremos detectar la existencia de comportamientos singulares del espacio-tiempo cuando estos no son ni siquiera parte del mismo. Siguiendo el punto de vista expuesto por R. P. Geroch en [18], un primer punto de partida para orientar la búsqueda es estudiar, como ya hemos hecho antes, los escalares de curvatura, que caracterizan la variedad y cuyo valor no puede ser modificado bajo cambios de coordenadas. Se pueden construir un gran número de escalares de curvatura, por ejemplo:  $R$ ,  $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ ,  $R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}$ ; o escalares dados por polinomios que incluyan derivadas covariantes del tensor de Riemann. El valor de estos escalares depende del punto que estemos considerando. Así, lo que nos gustaría es encontrar alguno de estos escalares tendiendo a infinito conforme dicho punto se acercara a la singularidad que ha sido eliminada de la variedad para poder identificarla. Sin embargo, esto es algo tautológico, ya que precisamente no sabemos identificar dicha situación. Además, en una curva que se propaga hacia el infinito, es posible que algún escalar de curvatura también se dispare a infinito, y esta no es la circunstancia que queremos catalogar como “singularidad”. Por otro lado, se pueden dar ejemplos sencillos de variedades singulares que sin embargo tienen tensor de curvatura idénticamente nulo en cada punto. Por ejemplo, si tomamos el espacio de Minkowski y eliminamos la región dada por los puntos con coordenada azimutal  $0 < \phi < \phi_0$ , para posteriormente identificar cada punto con  $\phi = 0$  con el correspondiente con  $\phi = \phi_0$ , nos encontramos con que se puede definir bien la estructura de la variedad con su métrica en los puntos que hemos identificado con  $r > 0$ . Sin embargo, no ocurre lo mismo en el origen  $r = 0$ , que constituye una singularidad cónica de la variedad, donde no se puede definir correctamente el espacio tangente. Y aun así, como anticipábamos, el tensor de Riemann es idénticamente nulo en cada punto, luego no consigue predecir este comportamiento correctamente. Por otro lado, se pueden dar ejemplos en los que ocurre lo contrario a lo que acabamos de exponer: se puede evitar el comportamiento singular sin hacer desaparecer las divergencias [19], lo que termina de concluir que no hay una relación necesaria entre ambos conceptos.

A pesar de esto último, las situaciones investigadas en el párrafo anterior demostrarán pronto su utilidad. Volvamos sobre la cuestión de distinguir cuándo una curva se está acercando a una singularidad o se está extendiendo hacia infinito. Una primera respuesta intuitiva para diferenciarlas se podría basar en que la curva que se aproxima al infinito debería tener longitud asimismo infinita desde un cierto punto, mientras que la que se aproxima a la singularidad debería tener longitud finita. Ello se debe a que, según nuestra idea intuitiva de singularidad como un “agujero” en el espacio-tiempo, las curvas que se encaminen hacia dicho agujero se verán cortadas. Sin embargo, puesto que estamos trabajando con métricas indefinidas, la noción de “distancia” no funciona como estamos acostumbrados, y hay curvas que se extienden al infinito con longitud nula. No obstante, sí

conocemos un concepto que puede servirnos para este fin incluso con métricas indefinidas: el rango del parámetro afín de una geodésica.

## 5.2. Completitud de caminos para detectar singularidades

Definamos una *semi-geodésica* como una curva geodésica que consideramos a partir de un cierto punto (al que denominamos punto final) y que se extiende lo más lejos posible en un sentido desde dicho punto. Diremos que un espacio es *geodésicamente completo* cuando el parámetro afín de cada semi-geodésica recorre un rango no acotado de valores. Con estas definiciones, exploramos la posibilidad de que podamos caracterizar un espacio-tiempo singular como aquel que no es geodésicamente completo, pues sus geodésicas se encuentran con los espacios dejados por las singularidades.

Atendiendo a los diferentes tipos de geodésicas existentes, se podría distinguir entre espacios con geodésicas completas de género tiempo, espacio o nulo. Si extraemos artificialmente un punto regular de un espacio-tiempo no singular, los tres tipos de geodésicas se ven afectados pasando a ser incompletas. De este modo, si en efecto queremos utilizar la no completitud geodésica para caracterizar la presencia de singularidades, debería cumplirse que estas tres maneras de ser geodésicamente completo fueran equivalentes. Sin embargo, esto no se verifica, como demostró Geroch en el paper que ya hemos mencionado [18]. Este construyó un espacio geodésicamente completo para geodésicas de género luz y espacio, que sin embargo, no lo era para geodésicas de género tiempo. El procedimiento seguido, además, era extrapolable para conseguir otros espacios parecidos que tuvieran geodésicas incompletas de alguno de los géneros, manteniendo la completitud en los otros, y así encontró espacio-tiempos de los siguientes tipos:

1. completo para género tiempo, incompleto para género espacio y nulo;
2. completo para género espacio, incompleto para género tiempo y nulo;
3. completo para género nulo, incompleto para género espacio y tiempo;
4. completo para género tiempo y nulo, incompleto para género espacio;
5. completo para género espacio y nulo, incompleto para género tiempo.

Al margen de este fracaso, encontramos que la incompletitud geodésica de género tiempo y nulo da lugar a fenómenos contradictorios con nuestra intuición. Para el caso de geodésicas de género tiempo se tiene una interpretación física inmediata. Puesto que el parámetro afín de dichas geodésicas se asocia al tiempo que marcan los relojes de observadores o partículas con estas como trayectorias, que estas finalicen para un valor finito del mismo significa que pasado un tiempo propio finito dichos observadores o partículas cesan de existir. Por su parte, no se puede otorgar una interpretación física así de sencilla al parámetro afín de geodésicas nulas. Sin embargo, sabemos que estas curvas reflejan las trayectorias de fotones en el espacio-tiempo, que también parecen acabar de forma abrupta. Estas circunstancias patológicas parecen suficientemente contradictorias con nuestra intuición física como para que exista un amplio consenso en considerarlas como condición suficiente para denominar a un espacio-tiempo singular [16]. De hecho, existen una serie de teoremas debidos a Hawking y Penrose [4][5] para caracterizar los espacios singulares cuya prueba se reduce a comprobar esta característica. Sin embargo, no se debe olvidar que puesto que no es una condición necesaria, existen muchos otros espacios cumpliendo ser geodésicamente completos para geodésicas de género luz y tiempo, que aun así, podrían ser considerados como singulares. Por ejemplo, en el mismo artículo anteriormente mencionado de Geroch [18] se construye un espacio geodésicamente completo que contiene una curva de género tiempo de aceleración acotada y longitud finita. De esta manera, un observador con una nave apropiada y una cantidad finita de combustible podría recorrer dicha curva y desaparecer tras un intervalo finito de tiempo. Si hemos asumido que un espacio singular

era aquel en que los observadores inerciales podían desaparecer tras intervalos finitos de tiempo, parece razonable incluir también a los observadores en naves espaciales aceleradas.

Así, en última instancia, lo que se hace para caracterizar los espacios singulares es generalizar el concepto de parámetro afín a cualquier tipo de curva diferenciable en la variedad, independientemente de que sea o no geodésica, y exigir la completitud respecto a dicho parámetro. Como ya anunciábamos, aquí se omitirá dicho procedimiento puesto que para analizar el espacio-tiempo de Schwarzschild es suficiente quedarnos con la condición necesaria de completitud geodésica de género temporal. Este procedimiento se desarrolla en detalle en [4].

### 5.3. Extensiones maximales

Ante toda la discusión realizada anteriormente cabe la siguiente objeción: podemos clasificar como singular un espacio regular al cual se le han quitado algunas regiones de forma artificial. Esto, en realidad, no nos permite concluir que hay una patología intrínseca en la geometría de la variedad, sino que simplemente que no la estamos considerando al completo. Así, podemos resolver esta cuestión fácilmente incluyendo de nuevo dichas regiones. Para ahorrarnos esta cuestión, restringimos la clasificación de variedades singulares a los espacio-tiempos *inextendibles*, o dicho de otro modo a las *extensiones maximales* de la geometría. Veamos qué significa esto con rigor, si bien ya nos lo podemos imaginar por los procedimientos aquí seguidos.

Un espacio-tiempo dado por la variedad  $M$  y la métrica  $g_{\mu\nu}$  se dice *extendible* si existen otro espacio tiempo, definido por  $\overline{M}$  y  $\overline{g}_{\mu\nu}$ , y una isometría  $\varphi$  (es decir, un difeomorfismo que preserva la métrica) de manera que  $\varphi : M \rightarrow \overline{M}$  con el contenido estricto  $\varphi(M) \subset \overline{M}$ . De modo análogo, diremos que es *inextendible* si no se dan las condiciones anteriores. En estas definiciones, al conectar las métricas por isometrías se exige que estas sean formas definidas en la variedad de clase al menos  $C^2$  para poder tener los tensores de curvatura bien definidos. Sin embargo, hay generalizaciones del concepto de extensión que relajan esta condición y simplemente buscan que el segundo espacio tenga una métrica continua [20]. Al margen de esto, para detectar si un espacio es inextendible, en el sentido que aquí se ha estipulado, se recurre precisamente a argumentos como los utilizados para definir las singularidades, pues estos son en gran número de ocasiones lo que impiden encontrar una métrica extendiendo la primera. Si hay una singularidad de la geometría espacio-temporal, en ningún caso podremos extender la métrica más allá de la misma.

Centrándonos en el ejemplo que nos ocupa, si recordamos el diagrama espacio-temporal de las coordenadas de Kruskal-Szekeres para cada espacio con  $\theta$  y  $\phi$  constantes, se tenía que este abarcaba la región entre las dos hipérbolas en que se desdoblaba la singularidad en  $r = 0$  en coordenadas de Schwarzschild. De esta manera, y puesto que las geodésicas nulas en coordenadas de Kruskal-Szekeres eran simplemente líneas a  $45^\circ$  con los ejes, encontramos que en efecto este espacio es geodésicamente incompleto para dicho género de geodésicas, pues todas empiezan o terminan en una de dichas singularidades, y veíamos que estas se alcanzaban para valores finitos del parámetro afín. Además, podemos concluir que nos encontramos en la extensión maximal, pues no podemos extender el parámetro afín más allá de dichas hipérbolas utilizando una isometría como hemos indicado. La única forma que tenemos de extender las geodésicas es por medio de argumentos como los que planteábamos en la sección 4.4. Sin embargo, como ya veíamos entonces, estos conllevan serios problemas con respecto a su viabilidad, y en este caso se concluye que esta no es una opción posible. Este tipo de argumentos son los que nos sirven para concluir que la extensión maximal de la geometría de Schwarzschild es, en efecto, la que nos da el elemento de línea de Kruskal-Szekeres, y que en  $r = 0$  encontramos una singularidad intrínseca al espacio-tiempo. Con esto, tenemos identificados todos los elementos de la geometría, y concluye nuestro análisis.

## 6. Conclusiones

Tras discutir todas las cuestiones precedentes, se pueden extraer una serie de conclusiones sobre lo que se ha conseguido en este trabajo.

En primer lugar, hemos logrado entender la forma de la métrica de Schwarzschild y discernir entre la situación en que una métrica resulta singular por una mala elección del sistema de coordenadas que describe la variedad frente a cuando verdaderamente indica la existencia de una patología ineludible en el espacio-tiempo. Numerosas soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein tienen elementos de línea singulares en ciertos sistemas de coordenadas. Es importante entender las herramientas matemáticas que se requieren para un tratamiento correcto de las mismas y para poder cambiar las coordenadas a otras que nos permitan deshacernos de dichos comportamientos problemáticos, si es posible, como hemos hecho aquí.

En este caso, nos hemos centrado en la solución de Schwarzschild, para la cual hemos conseguido encontrar la extensión maximal. Además, en el estudio de la misma, se ha podido explicar en profundidad conceptos físicos de gran importancia relacionados con los agujeros negros. El primero consiste en el horizonte de eventos, el cual, en efecto, hemos visto que supone un punto de no retorno para partículas y fotones que lo atraviesen. Además hemos comprobado, que si bien un observador inercial en el infinito espacial no consigue ver una partícula atravesando dicho horizonte, el sistema propio de la partícula no impide en ningún caso que se atraviese dicho radio.

Por otro lado, gracias a la extensión maximal también hemos podido describir el puente de Einstein-Rosen, que constituye una reparametrización concreta de la solución de Schwarzschild. Este nos ha permitido investigar la posibilidad de extender trayectorias de geodésicas modificando la topología e identificando las singularidades pasada y futura. Si bien este fenómeno no constituye un agujero de gusano al uso, su hallazgo fue pionero en el estudio de estas estructuras, que también cobran gran relevancia en el contexto de los agujeros negros.

Finalmente, hemos podido concluir que el otro comportamiento patológico de la métrica de Schwarzschild se debe a una singularidad intrínseca al espacio-tiempo. Hemos visto que la definición de singularidad puede ser escurridiza, y que, aunque hay situaciones que sirven para apuntar a la existencia de este fenómeno, como los escalares de curvatura que tienden a infinito, en general no suelen ser criterios concluyentes. Sin embargo, sí hemos conseguido llegar a al menos una condición necesaria para la existencia de singularidades: el criterio de incompletitud geodésica que veníamos observando desde las primeras secciones. Para ello, hemos justificado por qué esta situación sí es lo suficientemente contradictoria con nuestra intuición física como para que se pueda considerar como tal.

En definitiva, en este trabajo se ha conseguido dar una explicación de los conceptos fundamentales relacionados con la física de los agujeros negros a través de la solución de Schwarzschild. Se sientan de este modo las bases en las intuiciones físicas y herramientas matemáticas que se pueden emplear para el estudio de otros modelos más complicados y con características que aquí se han obviado: por ejemplo, rotación o carga electromagnética.

## Referencias

- [1] S. J. Bell, *The Measurement of radio source diameters using a diffraction method*, BLDSC-D2164-72.
- [2] K. Schwarzschild, *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (1916), págs. 189-196.
- [3] M. P. Hobson, G. Efstathiou & A.N. Lasenby, (2006). *General Relativity: an introduction for physicists*, Cambridge University Press.
- [4] S. W. Hawking, & J. F. R. Ellis, (1973). *The large structure of space-time*. Cambridge University Press.
- [5] R. Penrose, *Gravitational Collapse and Space-Time Singularities*. Phys. Rev. Lett. **14**, 57 (1965)
- [6] A. S. Eddington, *A Comparison of Whitehead's and Einstein's Formulæ*, Nature **113** (1924), 2832, pág. 192.
- [7] D. Finkelstein, *Past-Future Asymmetry of the Gravitational Field of a Point Particle*, Phys. Rev. **110** (1958), 4, págs. 965-967.
- [8] M. D. Kruskal, *Maximal Extension of Schwarzschild Metric*, Phys. Rev. **119** (1960), págs. 1743-1745
- [9] P. Szekeres, *On the Singularities of a Riemannian Mani-fold*, Publ. Math. Debrecen **7** (1960), págs. 285-301
- [10] R. A. Remillard & J. E. McClintock, *X-ray Properties of Black-Hole Binaries*, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **44** (2006), págs. 49-92
- [11] B. Abbott *et al.* [LIGO Scientific and Virgo], *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, Phys. Rev. Lett. **116** (2016) no.6, 061102
- [12] K. Akiyama *et al.* [Event Horizon Telescope], *First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole*, Astrophys. J. **875** (2019) no.1, L1
- [13] A. Retter and S. Heller, *The Revival of White Holes as Small Bangs*, New Astron. **17** (2012), 73-75
- [14] A. Einstein and N. Rosen, *The particle problem in the general theory of relativity*,
- [15] M. Visser, (1996). *Lorentzian Wormholes: from Einstein to Hawking*. Nueva York, NY: Springer-Verlag.
- [16] E. Curiel and P. Bokulich, *Singularities and Black Holes*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2020 Edition), Edward N. Zalta (ed.).
- [17] G. F. R. Ellis and B. G. Schmidt, *Singular space-times*, Gen. Rel. Grav. **8** (1977), 915-953
- [18] R. P. Geroch, *What is a singularity in general relativity?*, Annals Phys. **48** (1968), págs. 526-540
- [19] J. G. Olmo, D. Rubiera-Garcia, & A. Sanchez-Puente, *Classical resolution of black hole singularities via wormholes* Eur. Phys. J. C **76** (2016) no.3, pág. 143

- [20] J. Sbierski, *The  $C_0$ -inextendibility of the Schwarzschild spacetime and the spacelike diameter in Lorentzian geometry*, J. Diff. Geom. **108** (2018) no.2, págs. 319-378
- [21] R. M. Wald, (1984). *General Relativity*. Chicago, IL: University Press.
- [22] C. W. Misner, K. S. Thorne, & J. A. Wheeler, (1973). *Gravitation and Cosmology*. W. H. Freeman.
- [23] T. Ortin, (2015). *Gravity and Strings*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Second Ed.
- [24] J. B. Hartle, (2003). *Gravity. An introduction to Einstein's General Relativity*, Addison Wesley.